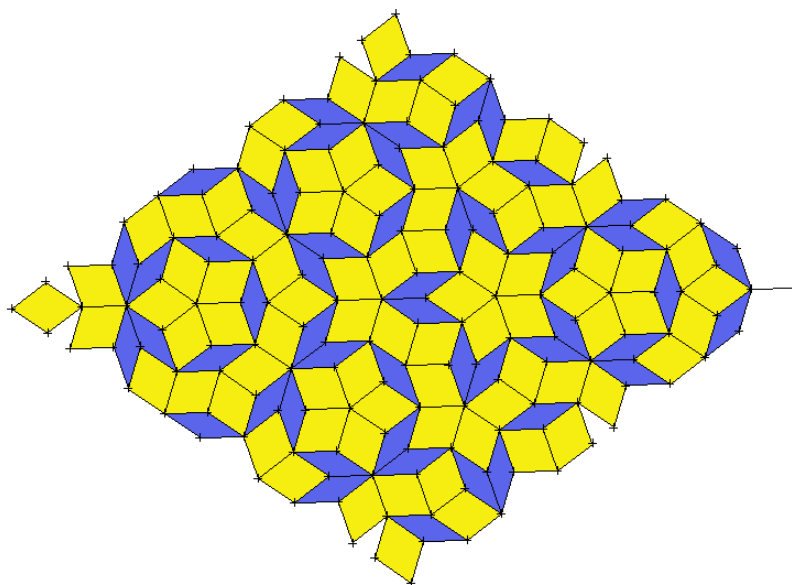


Chapitre 08 - Trigonométrie du triangle quelconque



Pavage de Penrose

Problème

Deux joueurs font un jeu sur une feuille de papier: au départ, ils placent n points sur la feuille.

La règle du jeu est simple: tour à tour, chaque joueur trace une ligne (droite ou non) entre deux points, puis ajoute un nouveau point sur la ligne qu'il a tracée. Mais attention: les lignes ne doivent jamais se croiser, et un point ne peut être relié qu'à trois autres points au maximum. Le perdant est celui qui ne peut plus tracer de lien.

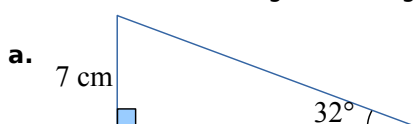
Combien de coups au maximum avec 2 points de départ ce jeu peut-il durer?

Trouver une stratégie gagnante pour deux points de départ.

Et si on augmente le nombre de points de départ...

1 [Souvenirs] Trigonométrie

- 1 Calculer le sinus de 63° et donner le résultat arrondi au millième.
- 2 Calculer le sinus et le cosinus de 27° et donner le résultat arrondi au centième.
- 3 Calculer la tangente de 27° et donner le résultat arrondi au centième.
- 4 Quel est l'angle compris entre 0° et 90° dont le cosinus vaut 0,2015 ?
- 5 Quel est l'angle compris entre 0° et 90° dont la tangente vaut 2,2015 ?
- 6 Pour chacun des triangles rectangles suivants, trouver les côtés et angles manquants :

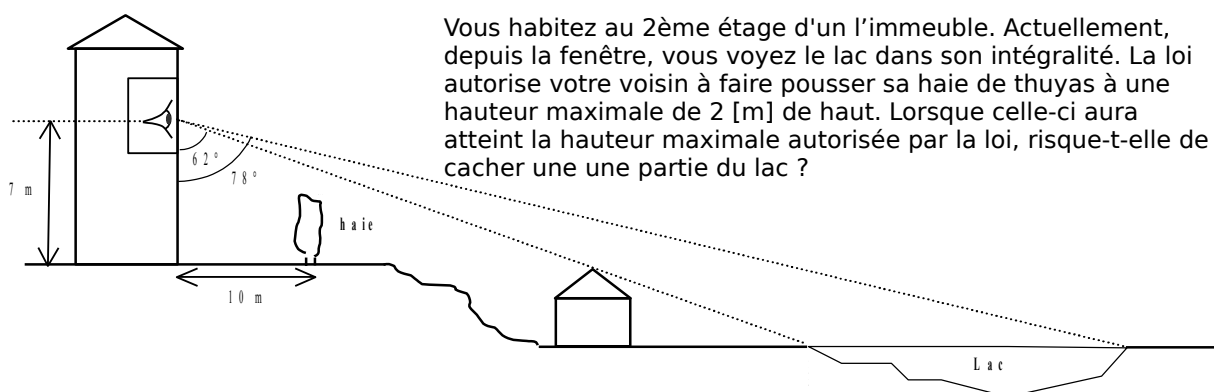


2 [Souvenirs] Résultats

Énoncer et démontrer les théorèmes suivants :

- 1 Théorème sur la somme des angles d'un triangle.
- 2 Théorème sur les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente d'un angle de 45° , 30° et 60° .
- 3 Théorème sur la somme des carrés du sinus et cosinus d'un angle strictement compris entre 0° et 90° .
- 4 Théorème sur la relation entre sinus, cosinus et tangente d'un angle.
- 5 Théorème sur la relation entre sinus et cosinus de deux angles complémentaires.

3 [Souvenirs] Application



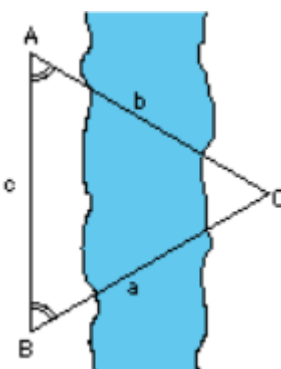
4 [Activité] Le cercle trigonométrique

- 1 Représenter graphiquement un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. On l'appelle le **cercle trigonométrique**.
- 2 Choisir un point $P(x;y)$ dans le premier quadrant sur le cercle trigonométrique puis considérer le point $Q(x;0)$, l'angle $\alpha = \widehat{QOP}$ et le triangle rectangle ΔQOP .
- 3 Montrer qu'on a ainsi $\sin(\alpha) = y$ et $\cos(\alpha) = x$.

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

5 [Aller plus loin] Utilité ?

« Le problème de base de la trigonométrie est à peu près celui-ci : vous vous tenez sur la rive d'un fleuve large et vous voulez savoir par exemple la distance d'un arbre situé de l'autre côté, désigné sur le schéma par la lettre C (pour simplifier ignorons la 3ème dimension). Comment faire sans traverser réellement le fleuve ?



sur un terrain identique.

La démarche habituelle consiste à planter deux poteaux aux points A et B, et avec un décamètre ou une chaîne d'arpenteur à mesurer la distance c qui les sépare (la ligne de base). Remplacez ensuite le poteau A par une lunette d'arpenteur (un théodolite), munie d'un plateau divisé en 360 degrés permettant de repérer sa direction (son azimut). En visant successivement l'arbre puis le poteau B, vous obtenez l'angle $\widehat{CAB}$ du triangle ΔABC par soustraction des chiffres lus sur le plateau d'azimut. A partir du point B on mesure l'angle $\widehat{ABC}$ de façon analogue. La longueur c de la ligne de base et les deux angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont suffisants pour tout connaître sur le triangle ΔABC , assez, par exemple, pour construire un triangle de même taille et de même forme

La trigonométrie (en grec $\tau\rho\iota\gamma\omega\upsilon\upsilon$ = triangle) était à l'origine l'art de préciser uniquement par le calcul les informations absentes. Avec suffisamment d'informations, la trigonométrie vous permet de calculer les dimensions et les angles d'un triangle préalablement défini.

Pourquoi des triangles ? Parce que ce sont les figures de base qui permettent de construire toutes les autres formes ayant des côtés rectilignes. Un carré, un pentagone ou un polygone peuvent être divisés en triangles, en menant des lignes droites d'un angle à tous les autres.

La gravure ci-contre montre un instrument de triangulation du suisse Jost Bürgi utilisé pour déterminer la distance des troupes ennemies, avant de canonner.

Les arpenteurs divisent une contrée en triangles pour la cartographier et placent à chaque sommet une balise, qui de nos jours est souvent une plaque ronde en laiton, arrimée au sol, avec une cuvette au centre destinée à placer les tiges et les appareils de visée (George Washington faisait ce travail dans sa jeunesse). Après avoir mesuré une ligne de base - telle que AB dans l'exemple du fleuve - l'arpenteur évaluait les angles formés par ces points vers un autre point C, et utilisaient la trigonométrie pour calculer les distances $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$. Celles-ci servaient de lignes de base pour deux nouveaux triangles qui à leur tour

fournissaient deux nouvelles lignes de base pour deux autres triangles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le pays entier soit couvert d'une grille ne comportant que des distances connues.





Ultérieurement, on peut ajouter une grille secondaire subdivisant les plus grands triangles dont on repère les angles par des mâts en ferraille ce qui permet de connaître des distances supplémentaires et d'établir des cartes et des plans. »

Source : Didier Müller,
<http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/GEOME/GEOME2>.

6 [Activité] Extension !

Pour cette activité, on peut avantageusement s'aider du logiciel GeoGebra ...

- 1 Représenter un point $P(x;y)$ dans le deuxième quadrant sur le cercle trigonométrique.
- 2 Soit le point $C(1;0)$. On s'intéresse maintenant à l'angle $\alpha = \widehat{COP}$. Quelles sont les valeurs possibles pour cet angle ?
- 3 Considérons le triangle $\triangle COP$. Il s'agit d'un triangle quelconque dont l'un des angles est supérieur à 90° . Lequel ?
- 4 Définir $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ de façon identique à ce qui a été vu dans l'activité précédente. On étend ainsi la définition du sinus et du cosinus pour $\alpha \in]90^\circ; 180[^\circ$.

7 [Activité] Calculs

- 1 Déterminer avec la calculatrice les valeurs du sinus et le cosinus de :

a. 99°

b. 126°

c. 170°

Donner les résultats arrondis au centième et interpréter graphiquement les résultats.

- 2 Déterminer sans calculatrice en utilisant le cercle trigonométrique les valeurs exactes du sinus et du cosinus de 90° , 120° et 150° , puis vérifier ces résultats avec la calculatrice.

8 [Activité] Attention !

- 1 Déterminer avec la calculatrice les valeurs des angles dont on donne le sinus ou le cosinus :

a. $\cos(\alpha) = 0.45673$

b. $\cos(\alpha) = -0.0234$

c. $\sin(\alpha) = 0.76543$

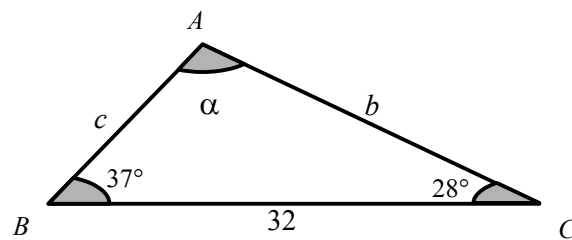
Donner les résultats arrondis au dixième et interpréter graphiquement les résultats.

- 2 Que peut-on déduire de l'exercice précédent ?

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 4 à 7

9 [Activité] Résoudre un triangle

1 Résoudre un triangle, c'est déterminer toutes les longueurs de côtés et mesures d'angles qui manquent. Résoudre le triangle ci-contre avec vos connaissances actuelles de trigonométrie :



2 Quelles sont les informations relatives à un triangle qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse le résoudre de façon unique ?

3 Si a et b sont des longueurs données, il y a un et un seul triangle ΔABC tel que $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ et $\widehat{BAC}=35^\circ$. Vrai ou faux ? Justifier

10 [Activité] Accélération : théorèmes du sinus et du cosinus

1 Le théorème du sinus

Théorème : Si ΔABC est un triangle quelconque, alors on a : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

a. Utiliser ce théorème pour résoudre directement le triangle de l'activité 9.1.

b. Démontrer ce théorème.

2 Le théorème du cosinus

Théorème : Si ΔABC est un triangle quelconque, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

a. Utiliser ce théorème pour résoudre directement le triangle $b=12, c=15, \alpha=121^\circ$

b. Démontrer ce théorème.

3 Résoudre les triangles suivants en utilisant les mémoires de la calculatrice et donner les réponses arrondies au dixième :

a. $b=47, \alpha=48^\circ, \gamma=57^\circ$

b. $a=10, b=15, c=12$

c. $a=5, c=8, \beta=77^\circ$

11 [Activité] Vacherie !

Soit ΔABC un triangle tel que $a=10.64$, $b=6.3$, $c=7.1$.

- Utiliser le théorème du cosinus pour déterminer γ .
- Utiliser le théorème du sinus pour déterminer α .
- Déterminer β grâce au théorème sur la somme des angles d'un triangle.
- Appliquer le théorème du cosinus à a , b et c et α pour vérification. Que constate-t-on ? Expliquer.

12 [Activité] CAC qui n'ont pas qu'une solution !

Résoudre le triangle ΔABC suivant : $b=10$, $\alpha=60^\circ$, $a=9$. Que constate-t-on ?

13 [Activité] Modélisation

Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

14 [Aller plus loin] Modélisation +

Un avion radar de reconnaissance P , volant à 3000 m au-dessus d'un point R à la surface de l'eau, détecte un sous-marin S (à la surface de l'eau) avec un angle de dépression de 37° et un bateau de ravitaillement T avec un angle de dépression de 21° . De plus, l'angle entre le sous-marin, l'avion et le bateau est mesuré à 110° .

Faire un schéma, puis calculer la distance entre le sous-marin et le bateau de ravitaillement.

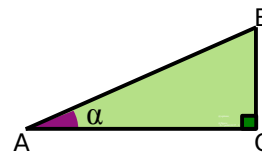
[Voir la théorie 5 et les exercices 8 à 10](#)

1 [Souvenirs] Vocabulaire et définitions (triangle rectangle)

Vocabulaire

Soit ΔABC un triangle rectangle en C tel que $\widehat{CAB} = \alpha$

- ☐ $[BC]$ est le **côté opposé** à α ;
- ☐ $[AC]$ est le **côté adjacent** à α ;
- ☐ $[AB]$ est l'**hypoténuse** du triangle ΔABC .



Définitions

- ☐ $\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$ (on dit **sinus** de alpha)
- ☐ $\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$ (on dit **cosinus** de alpha)
- ☐ $\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}$ (on dit **tangente** de alpha ; on note aussi $\text{tg}(\alpha)$)

Remarque : ces définitions ont un sens grâce au théorème de Thalès

2 [Souvenirs] Théorèmes

Théorème (somme des angles d'un triangle)

La somme (des mesures) des angles d'un triangle est égale à 180° .

Théorème (valeurs exactes)

angle	sinus	cosinus	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Théorème (somme des carrés)

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, alors on a : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Théorème (formule de la tangente)

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, alors on a : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Voir les exercices 1 à 3

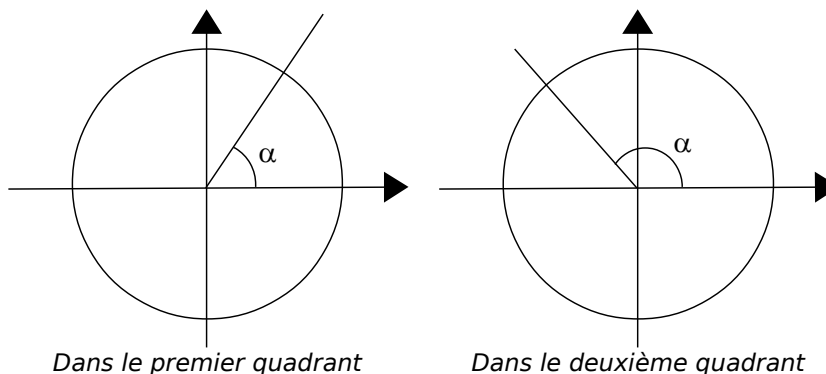
3 [A savoir] Sinus et cosinus dans le triangle quelconque

Vocabulaire

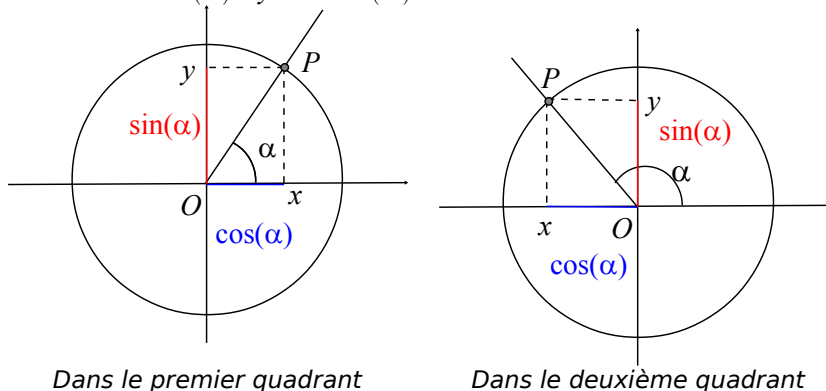
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1.

Définition

Soit $\alpha \in]0^\circ; 180^\circ[$. On représente cet angle au centre d'un cercle trigonométrique de telle sorte que l'une des demi-droites qui définissent α soit le demi-axe positif Ox et l'autre une demi-droite d issue de O coupant le cercle trigonométrique dans le premier ou le deuxième quadrant :



Soit $P(x;y)$ le point d'intersection de d avec le cercle trigonométrique ; on définit le sinus et le cosinus de α ainsi : $\sin(\alpha) = y$ et $\cos(\alpha) = x$.



Théorème (min et max)

Si $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, alors on a : $0 < \sin(\alpha) \leq 1$ et $-1 < \cos(\alpha) < 1$

Théorème (valeurs exactes)

angle	sinus	cosinus
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
135°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
90°	1	0

Théorème (somme des carrés)

Si $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, alors on a : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Théorème (complémentaires)

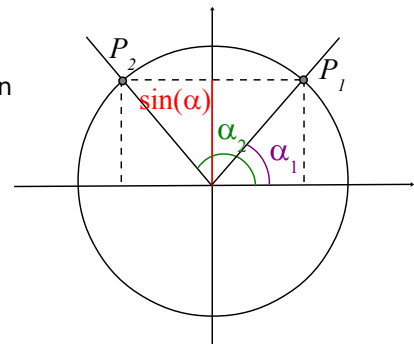
Si $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, alors on a : $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$ et $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$

Théorème (supplémentaires)

Si $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, alors on a : $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ et $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$

4 [A savoir] PréimageS du sinus

Si on connaît la valeur du sinus d'un angle et qu'on cherche à déterminer cet angle, il y a deux solutions :



Exemple : déterminer α tel que $\sin(\alpha) = 0.3456$ et donner la réponse arrondie au centième.

On utilise la calculatrice avec la touche $\sin^{-1}$.

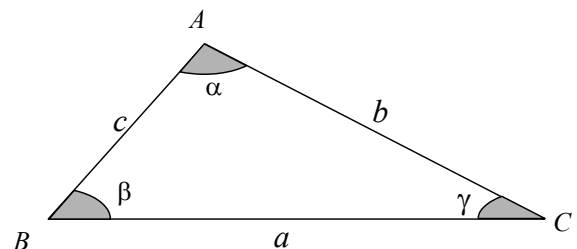
La réponse est $x_1 = \sin^{-1}(0.3456) \approx 20,22^\circ$.

Par symétrie, on trouve la deuxième réponse : $x_2 \approx 180 - 20,22 = 159,78^\circ$.

Voir les exercices 4 à 7

5 [A savoir] Résoudre un triangle

Soit ΔABC un triangle quelconque :



Résoudre un triangle, c'est déterminer toutes les longueurs de côtés et mesures d'angles qui manquent.

Définition [rappel]

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si ils peuvent être superposés l'un à l'autre. cela est équivalent à dire que tous leurs côtés et tous leurs angles ont des mesures égales deux-à-deux. Dans ce cas, on note : $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$.

Cas d'isométrie des triangles [rappel]

□ Axiome C-C-C (côté-côté-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs des trois côtés du ΔABC sont égales aux longueurs des trois côtés du ΔEFG , alors les deux triangles sont isométriques.

□ Axiome C-A-C (côté-angle-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle adjacent à ces deux côtés sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

□ Axiome A-C-A (angle-côté-angle)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si la longueur d'un côté et des mesures des deux angles adjacents à ce côté sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Remarque: les situations suivantes ne permettent pas dans tous les cas d'affirmer que les triangles sont isométriques:

□ A-A-A

□ C-A-C avec un des deux côtés non adjacent à l'angle (ou CCA)

Théorème du sinus

Soit ΔABC un triangle quelconque. Alors on a : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

Théorème du cosinus

Soit ΔABC un triangle quelconque. Alors on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ (et symétriquement $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$)

Remarque : le théorème du cosinus peut être vu comme une généralisation du théorème de Pythagore aux cas des triangles quelconques.

Exemple 1 : résoudre le triangle $b = 12,4$, $\alpha = 28^\circ$, $\gamma = 57^\circ$

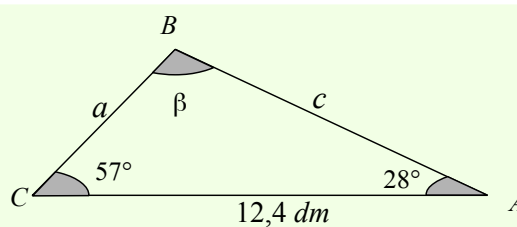
On analyse la situation : la somme des deux angles donnés est inférieure à 180° , donc il y a une unique solution au problème (cf A-C-A).

On détermine β par le théorème sur la somme des angles dans un triangle :
 $\beta = 180 - 28 - 57 = 95^\circ$.

On peut utiliser le théorème du sinus pour calculer les deux autres côtés :

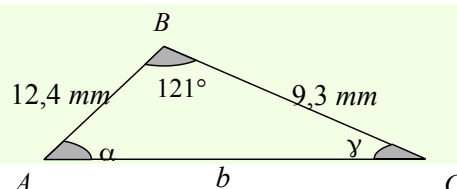
$$\frac{\sin(28)}{a} = \frac{\sin(95)}{12,4} = \frac{\sin(57)}{c}, \text{ d'où on déduit que } a = \frac{\sin(28) \cdot 12,4}{\sin(95)} \approx 5,84 \text{ dm}$$

$$c = \frac{\sin(57) \cdot 12,4}{\sin(95)} \approx 10,44 \text{ dm}$$



Exemple 2 : résoudre le triangle $a = 9,3 \text{ mm}$, $c = 12,4 \text{ mm}$, $\beta = 121^\circ$

On analyse la situation : par C-A-C (avec les côtés adjacents à l'angle connu), il y a une unique solution.



On calcule b par le théorème du cosinus :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) = 9.3^2 + 12.4^2 - 2 \cdot 9.3 \cdot 12.4 \cdot \cos(121) \approx 359.04, \text{ d'où } b \approx 18.95 \text{ mm}$$

Comme on a déjà un angle de 121° dans le triangle, on sait que les autres angles sont aigus (càd inférieurs à 90° , grâce au théorème sur la somme des angles dans un triangle). Il n'y a donc pas de problème avec l'utilisation de $\sin^{-1}$.

On utilise donc le théorème du sinus pour calculer un autre angle :

$$\frac{\sin(\alpha)}{9.3} = \frac{\sin(121)}{18.95} = \frac{\sin(\gamma)}{12.4} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sin(121) \cdot 9.3}{18.95}, \text{ d'où on déduit que}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(121) \cdot 9.3}{18.95}\right) \approx 24.88^\circ$$

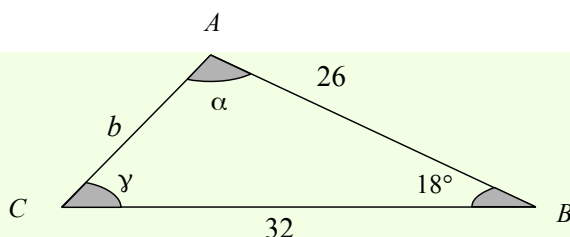
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le théorème du cosinus ...

On conclut avec le théorème sur la somme des angles : $\gamma \approx 180 - 121 - 24.88 = 34.2^\circ$

Exemple 3 : résoudre le triangle

$$a = 32, c = 26, \beta = 18^\circ$$

On analyse la situation : par C-A-C (avec les côtés adjacents à l'angle connu), il y a une unique solution.



On calcule b par le théorème du cosinus :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) = 32^2 + 26^2 - 2 \cdot 32 \cdot 26 \cdot \cos(18) \approx 117.44, \text{ d'où } b \approx 10.84$$

Comme on a un angle aigu dans le triangle, il pourrait y avoir un angle obtus ... il faut donc faire attention avec l'utilisation de $\sin^{-1}$.

On préfère donc utiliser le théorème du cosinus pour calculer un autre angle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha), \text{ soit } 32^2 \approx 10.84^2 + 26^2 - 2 \cdot 10.84 \cdot 26 \cos(\alpha), \text{ d'où on déduit que}$$

$$\alpha \approx \cos^{-1}\left(\frac{32^2 - 10.84^2 - 26^2}{-2 \cdot 10.84 \cdot 26}\right) \approx 114.14^\circ$$

Et le dernier angle : $\gamma \approx 180 - 18 - 114.14 = 47.86^\circ$

Remarque : si on avait utilisé le théorème du sinus pour déterminer directement α , on

aurait trouvé : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{32} \approx \frac{\sin(18)}{10.84} \approx \frac{\sin(\gamma)}{26}$ d'où

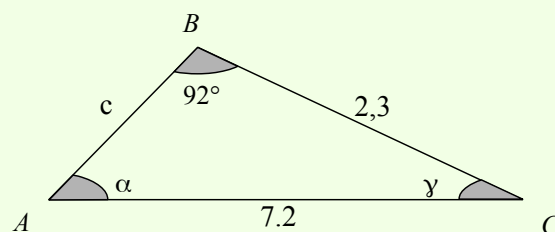
$$\sin(\alpha) \approx \frac{\sin(18) \cdot 32}{10.84} \text{ et donc } \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(18) \cdot 32}{10.84}\right) \approx 65.81^\circ, \text{ ce qui n'est pas la bonne}$$

réponse pour le triangle. La bonne réponse est la seconde préimage, soit

$\alpha \approx 180 - 65.81 = 114.19^\circ$ (la petite différence avec la solution trouvée précédemment produit des erreurs d'arrondis).

Exemple 4 : résoudre le triangle $a = 2.3, b = 7.2, \beta = 92^\circ$

On analyse la situation : on n'est dans aucun des cas C-A-C (avec les côtés adjacents à l'angle connu), C-C-C ou A-C-A ; il pourrait donc a priori y avoir deux solutions ... Mais comme β est obtus, les deux autres angles sont forcément aigus.



On utilise donc le théorème du sinus pour calculer sans risque α , car la solution

fournie par la calculatrice (entre 0° et 90°) sera forcément la bonne : $\frac{\sin(\alpha)}{2.3} = \frac{\sin(92)}{7.2}$

$$\text{d'où } \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(92) \cdot 2.3}{7.2}\right) \simeq 18.62^\circ.$$

On détermine le 3e angle avec le théorème sur la somme des angles :

$$\gamma \simeq 180 - 18.62 - 92 = 69.38^\circ$$

Et enfin le dernier côté, soit avec le théorème du sinus (plus rapide) ou avec celui du cosinus :

$$\frac{\sin(18.62)}{2.3} = \frac{\sin(69.38)}{c}, \text{ soit } c \simeq \frac{2.3 \cdot \sin(69.38)}{\sin(18.62)} = 6.74$$

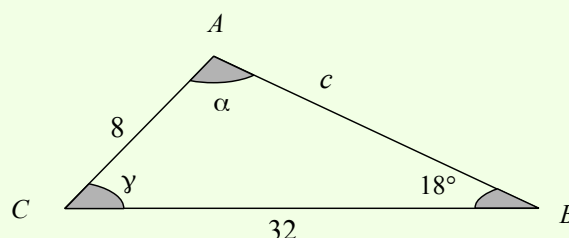
[avec le théorème du cosinus :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \simeq 2.3^2 + 7.2^2 - 2 \cdot 2.3 \cdot 7.2 \cos(69.38) \simeq 45.47, \text{ d'où : } c \simeq 6.74$$

Exemple 5 : résoudre le triangle $a=32, b=8, \beta=18^\circ$

On analyse la situation : on n'est dans aucun des cas C-A-C (avec les côtés adjacents à l'angle connu), C-C-C ou A-C-A ; il pourrait donc à priori y avoir deux solutions ... ou aucune !

On utilise le théorème du sinus :



$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\theta)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{32} = \frac{\sin(18)}{8} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \text{ soit } \sin(\alpha) = \frac{\sin(18) \cdot 32}{8} \simeq 1.24 > 1$$

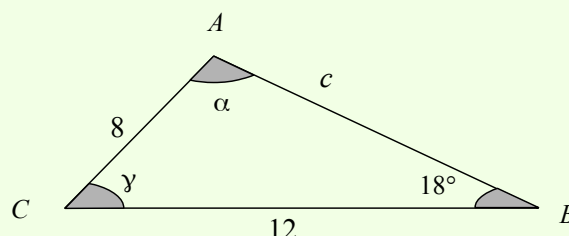
Il n'y a donc pas de solution à ce problème !

Remarque : on aurait pu utiliser le théorème du cosinus ; on aurait eu à résoudre une équation du 2e degré qui aurait également montré qu'il y n'y a pas de solution à ce problème.

Exemple 6 : résoudre le triangle $a=12, b=8, \beta=18^\circ$

On analyse la situation : on n'est dans aucun des cas C-A-C (avec les côtés adjacents à l'angle connu), C-C-C ou A-C-A ; il pourrait donc à priori y avoir deux solutions ... ou aucune !

On utilise le théorème du sinus :



$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\theta)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{12} = \frac{\sin(18)}{8} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \text{ soit}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(18) \cdot 12}{8} \simeq 0.4635 \dots$$

$$\text{Il y a donc deux solutions : } \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(18) \cdot 12}{8}\right) \simeq 27.61^\circ \text{ ou par symétrie}$$

$$\alpha \simeq 180 - 27.61 = 152.39^\circ$$

Il faut donc traiter les deux cas distinctement :

cas 1 : $\alpha \approx 27.61^\circ$

d'où $\gamma \approx 180 - 27.61 - 18 = 134.39^\circ$

et enfin avec le théorème du sinus : $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(18)}{8} = \frac{\sin(134.39)}{c}$, soit

$$c = \frac{8 \cdot \sin(134.39)}{\sin(18)} \approx 18,41$$

cas 2 : $\alpha \approx 152.39^\circ$

d'où $\gamma \approx 180 - 152.39 - 18 = 9.61^\circ$

et enfin avec le théorème du sinus : $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(18)}{8} = \frac{\sin(9.61)}{c}$,

$$\text{soit } c = \frac{8 \cdot \sin(9.61)}{\sin(18)} \approx 4.13.$$

Remarque : on aurait pu utiliser le théorème du cosinus ; on aurait eu à résoudre une équation du 2e degré qui aurait conduit également à ces deux solutions.

Voir les exercices 8 à 10

6 [A savoir] Modéliser

Exemple : lorsque l'angle d'élévation du soleil est de 55° , un poteau téléphonique qui penche d'un angle de 10° par rapport à une ligne formée par le pied du poteau et le soleil projette une ombre de 7,2 m sur le sol. Calculer la longueur du poteau.

La situation peut être schématisée ainsi :

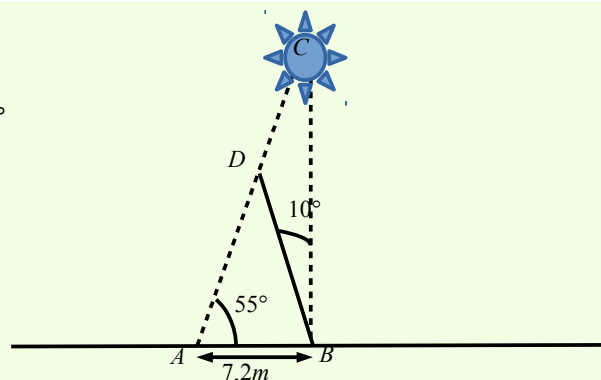
l'angle $\angle ABD = 90 - 10 = 80^\circ$

donc l'angle $\angle BDA = 180 - 55 - 80 = 45^\circ$

Par le théorème du sinus, on a :

$$\frac{\sin(55)}{BD} = \frac{\sin(45)}{7,2}$$

$$\text{d'où : } BD = \frac{\sin(55) \cdot 7,2}{\sin(45)} \approx 8,3 \text{ m}$$



Trigonométrie du triangle rectangle

1 Quelle est la longueur de l'ombre projetée par un arbre de 12m de haut lorsque le Soleil est élevé de 52° au-dessus de l'horizon ?

2 Soit $\triangle RST$ un triangle rectangle en R . On a $\overline{ST} = 25,43$ cm et $\overline{RT} = 12,30$ cm. Calculer $\widehat{RST}$ et $\overline{RS}$.

3 Elsa joue au cerf-volant sur la plage. La ficelle est déroulée au maximum et est tendue. L'angle de la ficelle avec l'horizontale est de 48° . Elle tient son dévidoir à 60 cm du sol. Le cerf-volant vole à 12 m du sol.

- Faire un schéma de la situation.
- Calculer la longueur de la ficelle déroulée. Donner la valeur arrondie au décimètre.

Voir la théorie 1 à 2

Trigonométrie du triangle quelconque

4 Déterminer avec la calculatrice les valeurs du sinus et le cosinus de :

- 17°
- 1°
- 179°

Interpréter graphiquement les résultats.

5 Déterminer avec la calculatrice les angles α tels que :

- $\cos(\alpha) = 0.47$
- $\cos(\alpha) = -0.47$
- $\sin(\alpha) = 0.47$
- $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Interpréter graphiquement les résultats.

6 Montrer que si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, alors on a $\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$ et $\cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha)$.

7 Montrer que si $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, alors on a $\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)$ et $\cos(\alpha) = -\cos(180 - \alpha)$.

Voir la théorie 3 à 4

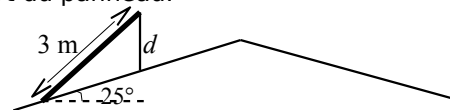
Résoudre un triangle

8 Résoudre les triangles suivants :

- $a = 70.24, b = 82.12, \gamma = 30.69^\circ$
- $a = 20.46, \beta = 58.25^\circ, \gamma = 39.38^\circ$
- $a = 41.94, b = 96.92, c = 107.28$
- $a = 98.06, b = 364.04, \beta = 30.65^\circ$
- $a = 460.14, b = 335.59, \beta = 39.37^\circ$
- $a = 85.80, c = 57.29, \beta = 117.81^\circ$
- $a = 68.87, b = 35.57, c = 81.46$
- $a = 345.45, b = 229.14, \beta = 15.48^\circ$

9 Pour calculer la distance entre deux points A et B , un géomètre choisit un point C qui est à 420m de A et à 540m de B . Si l'angle $\widehat{ACB}$ a une mesure de $63^\circ 10'$, calculer la distance séparant A et B .

10 Un panneau solaire de 3 mètres de largeur doit être fixé sur un toit, qui forme un angle de 25° avec l'horizontale. Pour optimiser son rendement, le panneau doit impérativement former un angle de 45° avec l'horizontale. Calculer la longueur d du support du panneau.



Voir la théorie 5

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

11 Résoudre les triangles suivants :

- $\alpha = 60^\circ, b = 20, c = 30$
- $a = 150, c = 30, \beta = 150^\circ$
- $a = 25, b = 80, c = 60$
- $a = 13, b = 20, \alpha = 32^\circ$
- $a = 5, c = 19, \alpha = 40^\circ$

12 Dans un triangle isocèle $\triangle ABC$, on sait que $\overline{BC}$ est de 21 cm et que l'angle en B égale l'angle en C égale 50° . Calculer le périmètre de ce triangle.

13 Calculer l'aire du triangle $\triangle ABC$.

a. $\alpha = 40.3^\circ, \beta = 62.9^\circ, b = 5.63$

b. $\alpha = 80.1^\circ, a = 8.0, b = 3.4$

14 Calculer l'aire de la surface comprise entre trois cercles tangents deux à deux, de rayons 10, 15 et 20 cm.

15 Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 mètres lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

16

a. Calculer le périmètre d'un polygone régulier convexe à sept côtés inscrit dans un cercle de rayon 2.

b. Un polygone régulier convexe à quinze côtés a une aire égale à 1500. Calculer la longueur de son côté et le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

17 Un chat aperçoit un arbre sous un angle de 38.6° . Il recule de 25 mètres et voit alors l'arbre sous un angle de 18.3° (on admettra que les yeux du chat et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a. À quelle distance de l'arbre le chat se trouvait-il au début ?

b. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

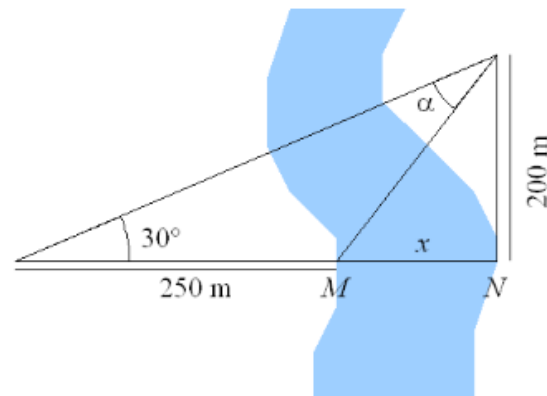
18 Deux observateurs, placés à la même altitude et distants de 1350 mètres, visent au même moment une montgolfière située entre eux. Cette montgolfière est dans le plan vertical contenant les deux observateurs. Les angles d'élévation sont de 65.4° et 76.5° .

Quelle est l'altitude de la montgolfière ?

19 Deux poulies, dont les diamètres sont 122cm et 88cm, sont reliées par une courroie de transmission tendue. La distance entre les axes des poulies est 400cm. Quelle est la longueur de la courroie ?

20 Quand la planète Vénus est observée depuis la Terre pendant une certaine période, elle paraît se mouvoir en avant et en arrière le long d'un segment de droite, le Soleil étant au milieu. À la distance apparente maximale du Soleil, l'angle Soleil-Terre-Vénus est d'environ 47° . Sachant que la distance Terre-Soleil vaut environ $148,64 \cdot 10^6$ km, estimer la distance séparant Vénus du Soleil.

21 Pour déterminer la largeur du Nil entre deux points M et N , les Égyptiens utilisaient un procédé semblable à celui présenté ci-dessous (vue prise d'avion) :



Calculer x et α .

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

11

a. $a \approx 26,46^\circ, \beta \approx 40,89^\circ, \gamma \approx 79,11^\circ$

b. $b \approx 176,62, \alpha \approx 25,15^\circ, \gamma \approx 4,87^\circ$

c. $\alpha \approx 12,43^\circ, \beta \approx 136,47^\circ, \gamma \approx 31,10^\circ$

d. sol.1 $\beta \approx 54,61^\circ, \gamma \approx 93,39^\circ, c \approx 24,489$

sol.2 $\beta \approx 125,39^\circ, \gamma \approx 22,61^\circ, c \approx 9,4327$

e. pas de solution

12 Le périmètre est d'environ 53,68 cm.

13

a. 11.21

b. 13.1

14 L'aire est d'environ $31,75 \text{ cm}^2$.

15 27.62 m

16

a. $p \approx 12.15$

b. côté environ 9.22, r environ 22.17

17

a. d environ 17.7 m

b. h environ 14.1 m

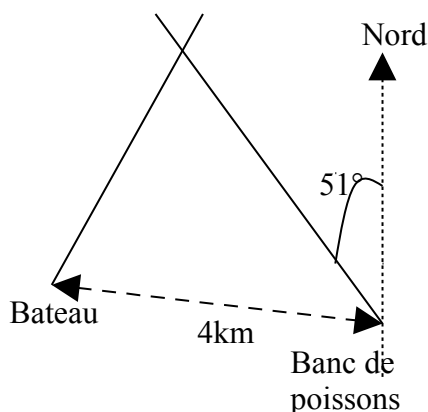
18 environ 1934 m

19 environ 1130.6 cm

20 environ 109 millions de km

21 x environ 96,4 cm, α environ $34,3^\circ$

1 Un bateau de pêche industriel utilise un sonar pour détecter un banc de poissons à 4 km à l'est du bateau, qui se déplace en direction N51°W à la vitesse de 16 km/h.



a. Si le bateau avance à une vitesse de 40 km/h, calculer à 0,1° près la direction à suivre pour intercepter le banc de poissons.

b. Calculer le temps, à la minute près, qu'il faudra au bateau pour atteindre le banc de poissons.

2 A l'origine, la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de haut. Comme elle s'enfonce dans le sol, elle penche maintenant d'un angle α par rapport à la perpendiculaire. Lorsque le sommet de la tour est observé à partir d'un point distant à 45 m du centre de sa base, l'angle d'élévation est de 53,3°.

a. Faire un schéma, puis calculer l'angle α .

b. Calculer la distance d qui exprime de combien le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire.

3 Un enfant est prisonnier au fond du puits d'une mine, dont le couloir rectiligne mesure 13 m et forme un angle de 78° avec l'horizontale. Un tunnel de sauvetage rectiligne est creusé à 15 m de l'ouverture de la mine sur le sol.

a. Faire un schéma, puis déterminer à quel angle θ le tunnel de sauvetage doit être creusé.

b. Si on peut creuser le tunnel de sauvetage à la vitesse de 10 m/h, combien d'heures seront nécessaires pour atteindre l'enfant ?

4 On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 3225 m de haut. A une distance de 2000 m de la base de la montagne, l'angle d'élévation est de 36°. Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 1500 m de la base est de 60°. Calculer la longueur du tunnel.

5 La voûte d'un tunnel cylindrique est un

arc de cercle dont l'angle au centre vaut 230°. Le rayon du cercle intérieur est de 5 m et la longueur du tunnel de 2800 m. Faire un schéma puis calculer le volume en m^3 de pierres nécessaires pour remblayer le tunnel, c'est-à-dire ce qu'on dépose au fond du cylindre sur toute sa longueur afin d'obtenir une chaussée plate.

6 Les pyramides de Gizeh sont 3 pyramides droites à base carrée. On considère a la longueur de la hauteur entre le milieu d'une base et le sommet, et α l'angle entre cette même hauteur et le segment qui relie le sommet au centre de la pyramide. Faire un schéma puis :

a. calculer l'aire des 4 faces de la pyramide en fonction de a et α ;

b. calculer le volume V de la pyramide ;

c. l'aire des 4 faces et le volume dans le cas où $a = 187$ m et $\alpha = 40^\circ$.

7 Les pavés de Penrose ont la forme de losanges $ABCD$, dont la longueur des côtés est 1 et dont un angle intérieur, BAD , mesure 72°. On situe un point P sur la diagonale $[AC]$, à une distance L du sommet C .

De ce point partent les deux segments de droite $[PB]$ et $[PD]$ rejoignant les deux autres sommets du losange. Les deux pavés ainsi formés sont appelés « fer de lance » (le plus petit) et « cerf-volant » (le plus grand). On utilise des composés analogues, mais en trois dimensions, en chimie moléculaire.

a. Calculer les mesures en degrés des angles $\angle BPC$, $\angle APB$ et $\angle ABP$.

b. Calculer la longueur du segment $[BP]$.

c. Calculer l'aire d'un fer de lance et d'un cerf-volant.

8 Trouver les étymologies des termes « angle », « degré », « trigonométrie », « sinus », « cosinus » et « tangente ».

9 On appelle parfois le théorème du cosinus le « théorème d'Al-Kashi ». Faire une recherche pour expliquer pourquoi.

10 Démontrer la formule de Héron dans un triangle quelconque (avec les notations usuelles dans le triangle) :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

« En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux »
Eric T. Bell, mathématicien écossais (1883-1960)

A savoir en fin de chapitre

Trigonométrie du triangle rectangle

- ✓ sin, cos et tan pour des angles strictement compris entre 0° et 90° ;
- ✓ théorèmes de trigonométrie de 1^{re} année ;
- ✓ modélisation avec des angles dans des triangles rectangles ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Trigonométrie du triangle quelconque

- ✓ sin, cos et tan pour des angles strictement compris entre 0° et 180° ; cercle trigonométrique ;
- ✓ théorèmes de trigonométrie dans le triangle quelconque ;
- ✓ utiliser la calculatrice efficacement pour calculer des angles et des longueurs de côtés, dans des triangles quelconques, en particulier utiliser correctement de $\sin^{-1}$ avec la calculatrice et les mémoires pour réduire les erreurs d'arrondis ; utiliser des notations correctes : $\sin/\sin^{-1} \dots =/\approx$;

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 4 à 7

Résoudre un triangle

- ✓ isométries du triangle ; cas d'isométrie ;
- ✓ théorèmes du sinus et du cosinus ;
- ✓ résoudre un triangle ;
- ✓ résoudre des exercices de modélisation utilisant la trigonométrie dans le triangle quelconque.

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 8 à 10

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

<http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch08>



[illegible][illegible]