



Quelques exercices récapitulatifs sur les chapitres 6 à 10

1 Factoriser le plus possible

a. $7x^2 + 5x - 2$

f. $49x^2 + 28x + 4$

b. $12x^3y + 3xy^3$

g. $x^2 + 5x - 14$

c. $3(x-1)^2 - 9(x-1)$

h. $2x^2 + 16x + 24$

d. $7a^3b^2c - 14a^2b^2c^2 + 28ab^3c$

i. $3x^2 - 3x - 36$

e. $(5x+4)(9x-5) - (12x+7)(5x+4)$

j. $(3a+2b)^2 - (a-7b)^2$

2 Résoudre et donner les solutions en valeurs exactes et simplifiées au maximum :

a. $x^2 - 3x = -4$

h. $(9x-5)^2 = 9$

b. $3x^2 = 6x + 1$

i. $4x^3 = 36x$

c. $x^2 = 121$

j. $x^3 - 3x^2 = x - 3$

d. $x^2 - 128 = 0$

k. $(3x+2)(x^2-1) = (9x^2-4)(x+1)$

e. $x^2 + 2x = -1$

l. $x^6 = x^2$

f. $(5x-4)^2 = (3x+7)^2$

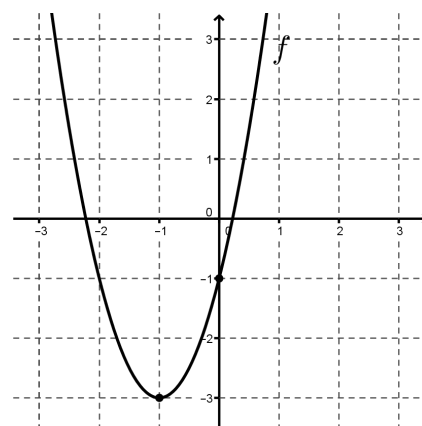
m. $(5x^2+3x-2)^2 = (4x^2-3x-2)^2$

g. $x^3 - x = 2x^2 - 2$

3 Pour la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, donner l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, l'axe de symétrie, le sommet et la représenter graphiquement de façon précise.

4 Voici une représentation graphique d'une fonction f du deuxième degré ; sa courbe représentative contient le point $(0 ; -1)$ et $(-1 ; -3)$ est son sommet :

Déterminer les 3 formes (factorisée, développée et canonique) de $f(x)$.



5 Les sommets du carré grisé appartiennent aux côtés du carré $ABCD$.

a. Exprimer l'aire grisée en fonction de x .

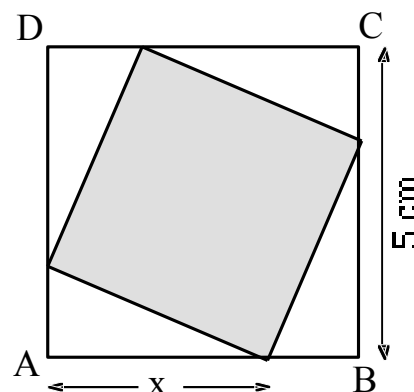
b. Esquisser le graphique de cette fonction "aire grisée".

c. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale

d. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle maximale

e. Combien valent ces aires minimale et maximale ?

f. Déterminer pour que l'aire grisée soit égale à 15 cm^2 .



6 Les points $A(-4 ; 4)$, $B(-\frac{5}{4} ; 2)$, $C(0 ; 1)$ et $D(3 ; -\frac{5}{4})$ sont-ils alignés ? Existe-t-il une parabole qui passe par A , B et C ?

7 Trouvez les trois côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 34 m et le périmètre 80 m.

8 Si la somme de deux nombres vaut 1 et que la somme des carrés de ces deux nombres vaut 2, combien vaut la somme de leurs puissances quatrièmes ?

9 La fonction qui donne la distance de freinage d'un véhicule (sur route sèche et horizontale) en fonction de la vitesse est du type $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a. Déterminer la valeur de c et justifier !

b. D'après le tableau suivant, déterminer la valeur des coefficients a et b .

vitesse	distance de freinage
0 km/h	
20 km/h	9 mètres
40 km/h	24 mètres
60 km/h	45 mètres

c. À partir de quelle vitesse la distance de freinage dépasse-t-elle 200 mètres ?

10 Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont :

a. le périmètre vaut 78 m et l'aire 360 m^2 ?

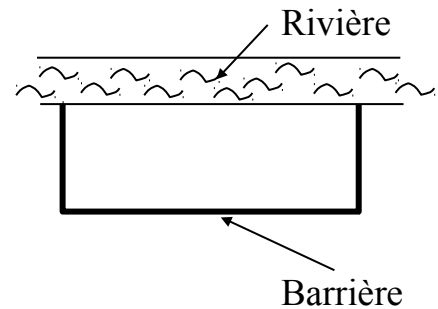
b. le périmètre vaut 68 m et l'aire 290 m^2 ?

11 Quel doit être le rapport des côtés d'un rectangle, pour qu'en menant une parallèle au petit côté de ce rectangle, on le partage en deux rectangles dont l'un est carré et l'autre semblable au rectangle initial ?

Pour simplifier, partez d'un rectangle de côtés 1 et c (avec $c > 1$).



12 Avec 300m de grillage, on clôture un terrain rectangulaire d'aire la plus grande possible et dont la longueur s'appuie sur le bord d'une rivière rectiligne, ce côté ne nécessitant pas de grillage. On appelle x la largeur du terrain (la longueur est plus grande que la largeur).



a. Montrer que la longueur du terrain est $300-2x$ puis déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème (D_{vipp})

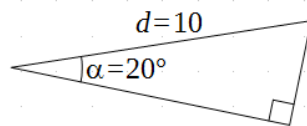
b. Montrer que l'aire du terrain à clôturer en fonction de x est donnée par $f(x) = -2x^2 + 300x$

c. En déduire la largeur x à prendre pour que le terrain soit d'aire maximale. Préciser alors cette aire et la longueur correspondante.

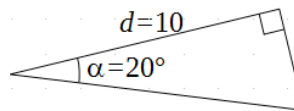
d. Interpréter graphiquement tout le problème.

13 Calculer les longueurs des côtés des triangles suivants :

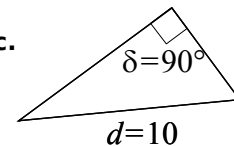
a.



b.

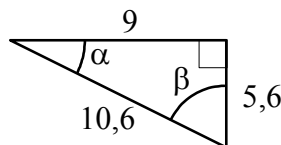


c.

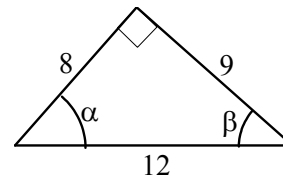


14 Déterminer les valeurs des angles des triangles suivants :

a.

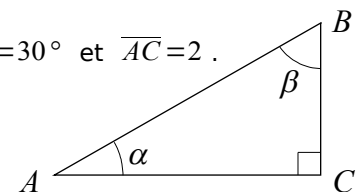


b.



15 On considère un triangle $\triangle ABC$ rectangle en C avec $\alpha = 30^\circ$ et $\overline{AC} = 2$. Calculer en valeur exacte le périmètre de ce triangle.

16 On considère un rectangle de côtés 5 cm par 8 cm.



a. Calculer l'angle entre une diagonale et les deux côtés du rectangle qui lui sont adjacents.

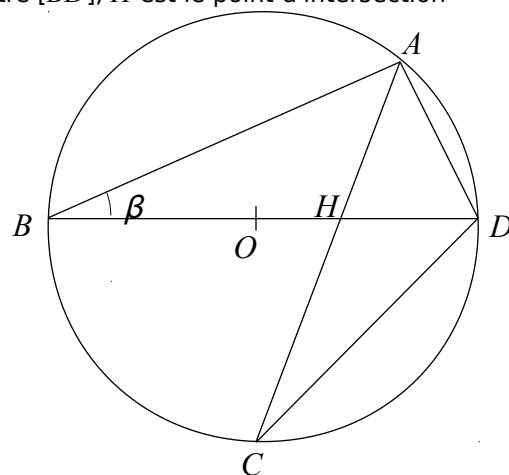
b. Calculer l'angle (aigü) entre les deux diagonales.

17 On considère un parallélogramme de côtés 5 cm par 8 cm et dont un angle entre les deux côtés est égal à 30° .

a. Calculer la longueur de la petite diagonale. Donner une réponse exacte et arrondie au centième.

b. Calculer la longueur de la grande diagonale. Donner une réponse exacte et arrondie au centième.

18 Dans le cercle ci-contre de centre O et de diamètre $[BD]$, H est le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, et on a : $\beta = 21^\circ$, $AB = 144$, $AH = 60$, $DH = 50$.



- Quelle est la particularité du triangle $\triangle ABD$? Justifier !
- Calculer la longueur du diamètre $[BD]$ (au centième).
- Calculer l'angle $\widehat{AOD}$ et justifier.
- Les triangles $\triangle ABH$ et $\triangle CDH$ sont-ils semblables ? Justifier précisément.
- Calculer la longueur $\overline{CD}$ au centième, en justifiant toutes les étapes.
- Calculer l'aire du triangle $\triangle OAD$ au centième.

19 Vrai ou faux ? Justifier.

- « Si deux triangles sont rectangles, alors ils sont semblables »
- « Si deux triangles sont équilatéraux, alors ils sont isocèles »
- Soit $\alpha \in]0; 90[$, alors :

i $\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$

vii $\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = 1$

ii $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)$

viii $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

iii $\cos(\alpha - 90) = \cos(\alpha)$

ix Si α et β sont complémentaires, alors $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sin(\beta) + \cos(\beta)$.

iv $\sin(\alpha^2) = \sin^2(\alpha)$

x $\sin(\alpha^2) = (\sin(\alpha))^2$

v $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) - \cos(\alpha)$

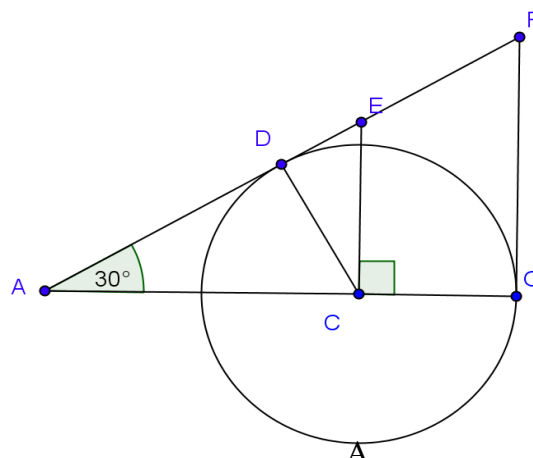
xi Il existe un angle dont le cosinus est égal à 2.

vi $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

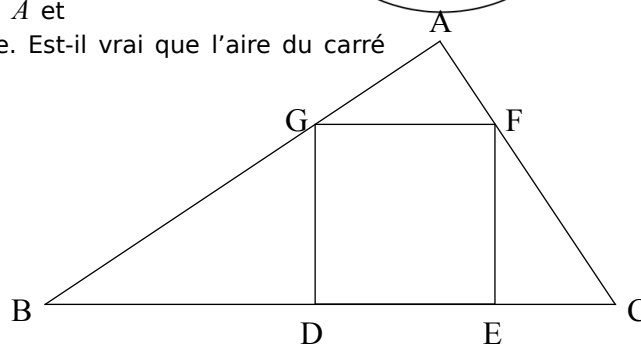
20 Soit un cercle de centre C et de rayon 6. De A , un point extérieur au cercle, part une demi-droite issue de A et passant par F tangente au cercle ; D est le point de contact.

On a un triangle $\triangle CAD$, un triangle $\triangle CAE$ avec $[CE]$ perpendiculaire à $[CA]$, et un triangle $\triangle AGF$ avec G un point commun à $[CA]$ et la tangente $[GF]$.

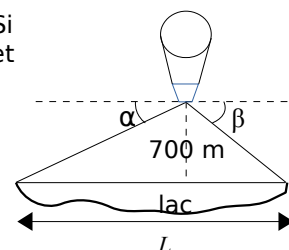
Calculer les longueurs des trois côtés de ces trois triangles.



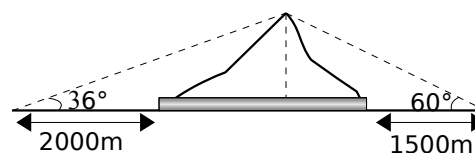
21 ABC est un triangle rectangle en A et $DEFG$ un carré inscrit dans ce triangle. Est-il vrai que l'aire du carré $DEFG$ est égale à $BD \cdot EC$? Justifier.



22 Un ballon vole à une altitude de 700 m en survolant un lac. Si les angles de dénivellation des rives du lac sont $\alpha = 48^\circ$ et $\beta = 39^\circ$, trouver la largeur L du lac.



23 On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 3225m de haut. À une distance de 2000m de la base de la montagne l'angle d'élévation est de 36° . Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 1500m est de 60° .



Calculer la longueur du tunnel.

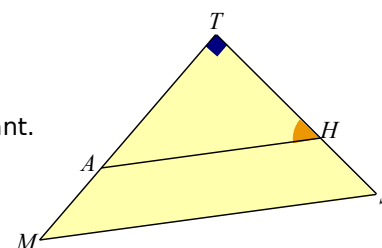
24 On considère le triangle $\triangle MTS$ tel que $\overline{MS} = 23\text{cm}$ et $\overline{TM} = 15\text{cm}$.

a. Les droites d_{AH} et d_{MS} sont parallèles.

b. Écrire les rapports de longueurs qui sont égaux en justifiant.

c. Écrire la relation donnant le sinus de l'angle $\widehat{AHT}$.

d. Dédire des questions a. et b. la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{AHT}$.



25 Imaginons que l'on tende une corde entre Nyon et Vevey (46 km à vol d'oiseau), les extrémités étant fixées au bord de l'eau du lac Léman. Du fait de la rotondité de la Terre, le milieu de la corde se trouve sous l'eau !

À quelle profondeur se trouve-t-elle ?

Indication : utiliser la valeur du cours pour le rayon de la Terre.

26 Le mathématicien grec Hipparque, au II^{ème} siècle avant J.-C., calcule la première table de sinus. Sa méthode consiste d'abord à établir une relation entre $\cos(\alpha)$ et $\cos(2\alpha)$, ce qui permet de calculer par exemple $\cos(15^\circ)$ à partir de $\cos(30^\circ)$, puis de calculer les sinus de ces angles. Voyons comment y parvenir, en considérant la figure ci-dessous dans un cercle de centre O et de rayon 1.

a. Que vaut β ?

b. Que vaut $\cos(2\alpha)$?

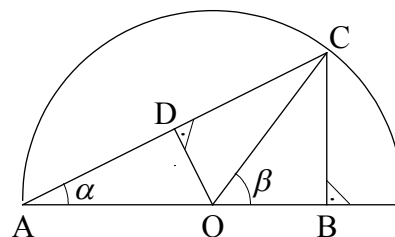
c. Dans le triangle $\triangle AOD$, déterminer $\cos(\alpha)$.

d. Dans le triangle $\triangle ABC$, déterminer $\cos(\alpha)$.

e. En remarquant que $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AD}$, montrer que $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

f. Utilisez ce résultat pour calculer la valeur exacte de $\cos(30^\circ)$ à partir de $\cos(60^\circ)$, puis celles de $\cos(15^\circ)$ et de $\cos(22,5^\circ)$.

g. Déduisez de ces résultats les valeurs exactes de $\sin(75^\circ)$, $\sin(67,5^\circ)$, $\sin(15^\circ)$ et $\sin(22,5^\circ)$.



27 Ptolémée savait calculer $\sin(15^\circ)$ grâce à une autre remarque, toujours dans un cercle de centre O et de rayon 1.

a. Déterminer les longueurs des segments $\overline{AB}$, $\overline{OB}$ puis $\overline{BI}$.

b. Calculer la valeur exacte du 3^e côté du triangle $\triangle ABI$.

c. Déduire alors la valeur exacte de $\sin(15^\circ)$.

d. Est-il vrai que $\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$? Justifier.

28 Calculer l'aire de la surface grisée :

