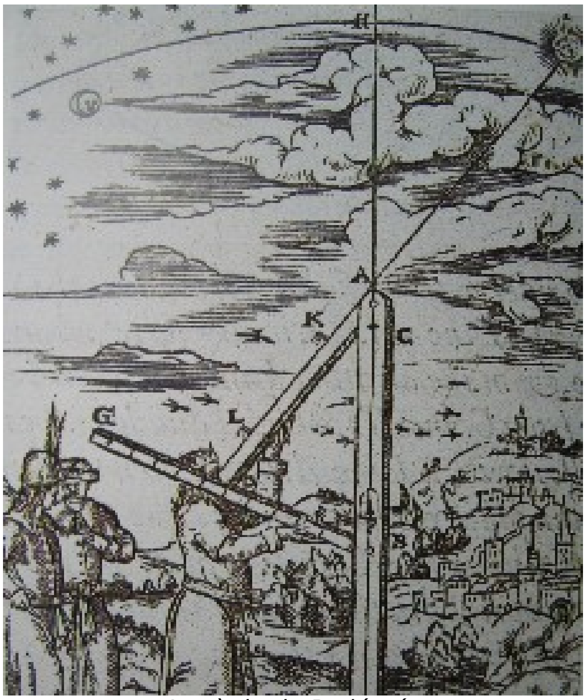
Chapitre 10 - Trigonométrie du triangle rectangle



La règle de Ptolémée

Source: http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr

Problème

Les cinq maisons (Le problème d'Einstein):
5 hommes de nationalités différentes habitent 5 maisons de 5 couleurs différentes. Ils fument des cigarettes de 5 marques distinctes et boivent 5 boissons différentes. Ils élèvent des animaux de 5 espèces différentes. La question à laquelle il faut répondre est : "Qui élève les poissons ?"
Voici 15 indices :

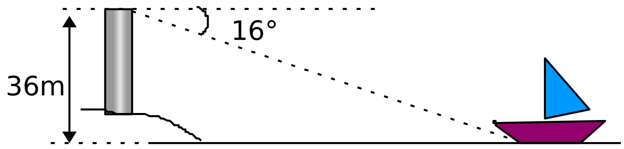
* Indice 1 - Le Finlandais habite la première maison.
* Indice 2- L'Allemand habite la maison rouge.
* Indice 3 - La maison verte est située juste à gauche de la maison blanche.
* Indice 4 - Le Turc boit du thé.
* Indice 5 - Celui qui fume des «Poison» habite à côté de celui qui élève les chats.
* Indice 6 - Celui qui habite la maison jaune fume des «Bad».
* Indice 7 – Le Suisse fume des «Beurk».
* Indice 8 - Celui qui habite la maison du milieu boit du lait.
* Indice 9 - Celui qui fume des «Poison» a un voisin qui boit de l'eau.
* Indice 10 - Celui qui fume des «Schlecht» élève des oiseaux.
* Indice 11 - Le Suédois élève des chiens.
* Indice 12 - Le Finlandais habite à côté de la maison bleue.
* Indice 13 - Celui qui élève des chevaux habite à côté de la maison jaune.
* Indice 14 - Celui qui fume des «Mala» boit de la bière.
* Indice 15 - Dans la maison verte on boit du café.

98% de la population mondiale est supposée incapable de le résoudre! A vous de contredire cette légende!

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Problème introductif

Du sommet d'une tour haute de 36 mètres au dessus du niveau de la mer, un bateau est observé avec un angle de dépression de 16°. A quelle distance se trouve le bateau de la tour ?



Expliquer pourquoi les outils de calcul géométrique dont nous disposons actuellement - angles, Pythagore, Thalès - ne suffisent pas à résoudre ce problème.

2 [Activité] Observation fondamentale

Soit :

i α un angle compris entre 0° et 90°

ii ΔABC un triangle rectangle en C

iii $\widehat{BAC}=\alpha$

1 Représenter cette situation sur un schéma.

2 Choisir une valeur pour l'angle α et donner plusieurs exemples différents de triangles ΔABC vérifiant ces conditions.

3 Vocabulaire :

i le côté $[AB]$ s'appelle **l'hypoténuse**. C'est le côté opposé à l'angle droit;

ii on dit que $[BC]$ est **le côté opposé** à l'angle α ;

iii on dit que $[AC]$ est **le côté adjacent** à l'angle α. (C'est le côté qui n'est ni l'hypoténuse, ni le côté opposé à l'angle α).

4 Que constate-t-on si on considère dans n'importe lequel de ces triangles le rapport entre le côté opposé à α et l'hypoténuse ? Justifier.

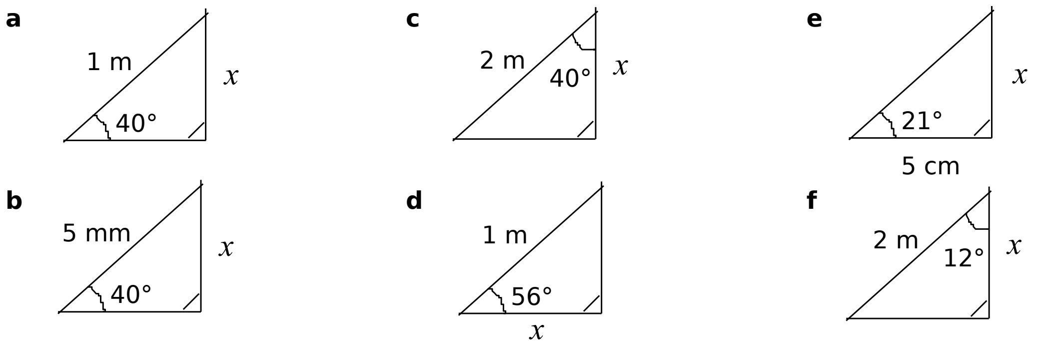
5 Même question avec le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse puis avec le rapport entre le côté adjacent et le côté opposé.

6 Essayer à présent de calculer $\overline{BC}$ (sans dessiner le triangle) lorsque l'hypoténuse mesure 16 cm, et lorsque l'angle α correspond à celui que vous avez choisi en 1.

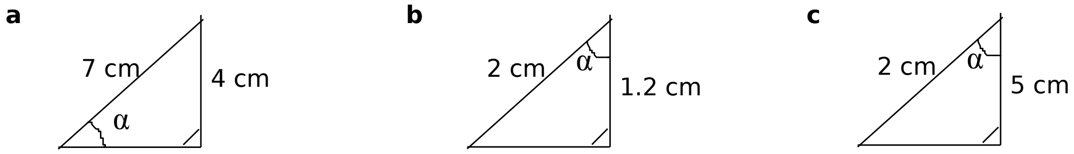
7 Remarquer qu'on peut aussi considérer l'angle $\widehat{CBA}=\beta$ ...

3 [Activité] Calculer un angle ou un côté d'un triangle

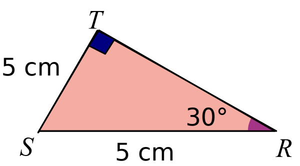
1 Calculer x à l'aide de la calculatrice et donner les résultats arrondis au millième :



2 Calculer α à l'aide de la calculatrice et donner les résultats arrondis au millième :



3 **Calcul de la mesure d'un angle**



a Quelle est l'hypoténuse du triangle ΔRST rectangle en T ?

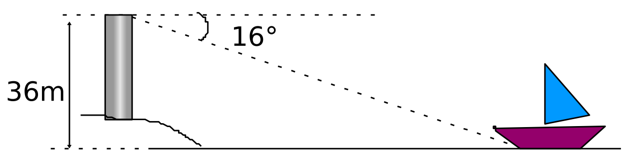
Que représente le côté $[TS]$ pour l'angle donné ?

b Écrire l'égalité reliant l'angle $\widehat{TRS}$ et les longueurs $\overline{SR}$ et $\overline{TS}$.
Avec la calculatrice, calculer sin(30°). Comparer avec le résultat trouvé à l'aide de $\overline{SR}$ et $\overline{TS}$.
Retrouver la mesure de l'angle $\widehat{TRS}$ en utilisant la touche « $\sin^{-1}$ ».

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

4 [Activité] Retour problème introductif... et le résoudre !

Du sommet d'une tour haute de 36 mètres au dessus du niveau de la mer, un bateau est observé avec un angle de dépression de 16°. A quelle distance se trouve le bateau de la tour ?



5 [Activité] D'autres problèmes

1 La ficelle tendue d'un cerf-volant mesure 200 mètres. Elle fait un angle de 63° avec l'horizontale. A quelle hauteur se trouve le cerf-volant ?

2 Un constructeur désire ériger une rampe de 7,2 m de long qui atteigne une hauteur de 1,5 m par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

3 Un vélideltiste vole à 1200 m au dessus du sol. Il voit un clocher dans une direction qui fait un angle de 40° au dessous de son horizontale. La hauteur du clocher est de 30 m. A quelle distance de la girouette située au sommet du clocher se trouve-t-il ?

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 13

6 [Activité] Valeurs exactes

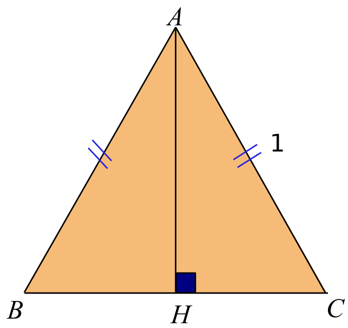
Pour certains angles, on peut déterminer les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente

1 **Angle de 30° et de 60°**

a Le triangle ΔABC est un triangle équilatéral de côté 1 et le point H est le milieu du côté $[BC]$.
En déduire la longueur de $[BH]$.

b Calculer la valeur exacte de $\overline{AH}$.

c Dans le triangle ΔABH rectangle en H, déterminer les valeurs exactes de sin (30°), cos (30°), tan (30°), sin (60°), cos (60°) et tan (60°).



Remarque : comment peut-on être certain que $\widehat{AHC}$ =90° ?
C'est seulement en 2e année que nous pourrons formellement le justifier !

2 **Angle de 45°**

a On considère un triangle ΔDEF rectangle en E, avec $\widehat{EFD}$ =45° et $\overline{EF}$ =1.

Représenter la situation par un schéma.

b Que peut-on dire de plus de ce triangle ? Justifier.

c Calculer la valeur exacte de $\overline{DF}$.

d Déterminer les valeurs exactes de sin (45°), cos (45°) et tan (45°).

3 Vérifier que la calculatrice donne bien les mêmes résultats.

7 [Activité] Application

Calculer en valeur exacte les côtés manquants des triangles ΔABC rectangles en C dans les cas suivants :

a $\alpha=45°$, $\overline{AB}=7$ **b** $\beta=60°$, $\overline{AC}=8$ **c** $\alpha=45°$, $\overline{AC}=7$ **d** $\beta=60°$, $\overline{AB}=8$

Voir la théorie 4 et l'exercice 14

8 [Activité] Relations trigonométriques

Démontrer les deux théorèmes suivants :

a Théorème : Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

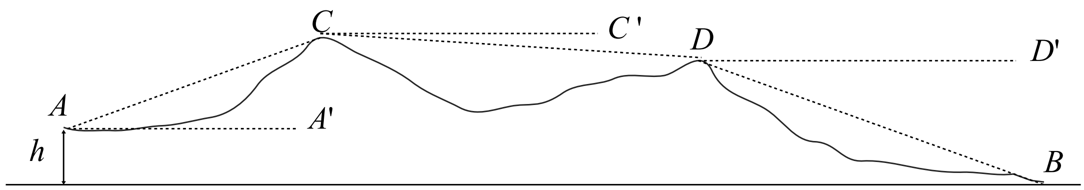
b Théorème : Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 15 à 16

9 [Aller plus loin] Problèmes plus difficiles...

1 Simon se trouve sur une falaise, 135 mètres au dessus du niveau de la mer. Il mesure l'angle compris entre son horizontale et l'horizon visible et trouve 0,375°. Il prétend pouvoir alors calculer le rayon de la Terre. Comment s'y prendra-t-il ?

2 Calculer l'altitude h du point A, et la distance à vol d'oiseau entre les points A et B, où $\overline{CD}$ = 180m, $\overline{AC}$ = 100m, $\overline{BD}$ = 70m, $\widehat{CAA'}=34°$, $\widehat{C'CD}=15°$ et $\widehat{D'DB}=35°$ $[AA'],[CC'],[DD']$ sont parallèles au sol :



3 Quelle est la longueur du 36$^{\text{ème}}$ parallèle terrestre ?
(On utilisera : rayon de la Terre $\simeq$ 6371 km)

4 Simon remarque depuis sont balcon que la Lune est à son zénith. À cet instant, il reçoit un télégramme de sa cousine Bernadette qui habite à 9904 km de là et qui tient à lui décrire le merveilleux lever de Lune sur l'océan qu'elle est en train d'admirer. Simon se dit immédiatement qu'il va ainsi pouvoir calculer la distance entre la Terre et la Lune ! Comment va-t-il procéder ? (On utilisera : rayon de la Terre $\simeq$ 6371 km)

5 Simon, toujours en éveil, remarque alors qu'il voit lui aussi la Lune. Il mesure l'angle sous lequel il la voit et obtient 0,52°. Il se dit qu'il va en profiter pour calculer aussi le rayon de la Lune. Comment va-t-il procéder, en connaissant la distance Terre-Lune (bord à bord) calculée dans l'exercice précédent, soit 385'652,3 km environ ?

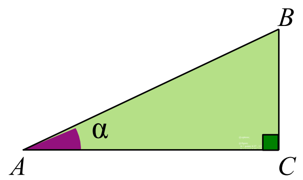
Voir les exercices 17 à 20

1 [A savoir] Relations liant angles et longueurs dans un triangle

Vocabulaire

Soit :

- α un angle compris entre 0° et 90°
- $\Delta\, ABC$ un triangle rectangle en C
- $\widehat{CAB}=\alpha$



On dit que $[BC]$ est le **côté opposé** à α, $[AC]$ est le **côté adjacent** à α et $[AB]$ est **l'hypoténuse** du triangle $\Delta\, ABC$.

Remarques

- Si $[BC]$ est le côté opposé à l'angle α, il est le côté adjacent de l'angle β.
- Un angle non-droit d'un triangle est délimité par deux côtés dont l'un est l'hypoténuse : on peut donc parler sans ambiguïté du côté adjacent d'un angle non-droit d'un triangle rectangle.

Définitions

- $\sin(\alpha)=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}=\dfrac{BC}{AB}$ (on dit **sinus** de alpha)
- $\cos(\alpha)=\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}=\dfrac{AC}{AB}$ (on dit **cosinus** de alpha)
- $\tan(\alpha)=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}=\dfrac{BC}{AC}$ (on dit **tangente** de alpha)

Ces définitions ont un sens grâce au théorème de Thalès, puisque quel que soit le triangle rectangle en C tel que $\widehat{CAB}=\alpha$, les rapports $\dfrac{BC}{AB}$, $\dfrac{AC}{AB}$ et $\dfrac{BC}{AC}$ sont constants, et ils ne dépendent que de l'angle α ; on peut donc les nommer respectivement $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$.

Remarque : on note aussi la tangente de alpha $\text{tg}(\alpha)$ à la place de $\tan(\alpha)$.

Trucs mnémotechniques

sin-opp-hyp / cos-adj-hyp / tan-opp-adj -> « sinopip-cosadgip-tanopadj »

sin-opp-hyp / cos-adj-hyp / tan-opp-adj -> SOHCAHTOA
(attention de mettre les H au bons endroits!)

Théorème

Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $0 < \sin(\alpha) < 1$ et $0 < \cos(\alpha) < 1$.

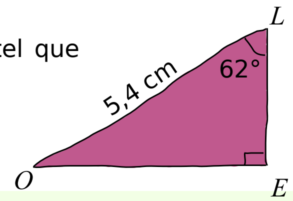
Remarque : Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $0 < \tan(\alpha) < \infty$.

2 [A savoir] Utiliser les relations liant angles et longueurs

Calculer des longueurs

Exemple 1 : on considère un triangle ΔLEO rectangle en E tel que $\overline{LO}$ = 5,4 cm et $\widehat{ELO}$ = 62°.

Calculer la longueur du côté $[EL]$ arrondie au millimètre.



Dans le triangle ΔLEO rectangle en E,
$[LO]$ est l'hypoténuse ;
$[EL]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ELO}$.
On doit utiliser le cosinus de l'angle $\widehat{ELO}$.

← On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\cos(\widehat{ELO}) = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos(\widehat{ELO}) = \dfrac{\overline{EL}}{\overline{LO}}$

← On écrit le cosinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$\overline{EL} = \overline{LO} \cdot \cos(\widehat{ELO})$

← On applique la règle des produits en croix.

$\overline{EL} = 5{,}4 \cdot \cos(62°)$

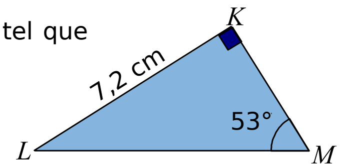
← On saisit :
5,4 × 2nd->trig->cos 62

$\overline{EL} \approx 2{,}5$ cm.

← $\overline{EL}$ est inférieure à $\overline{LO}$. Le résultat est cohérent.

Exemple 2: on considère ΔKLM un triangle rectangle en K tel que $\overline{KL}$ = 7,2 cm et $\widehat{LMK}$ = 53°.

Calculer la longueur du côté $[LM]$ arrondie au millimètre.



Dans le triangle ΔKLM rectangle en K,
$[LK]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{LMK}$;
$[LM]$ est l'hypoténuse.
On doit utiliser le sinus de l'angle $\widehat{LMK}$.

← On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\sin(\widehat{LMK}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin(\widehat{LMK}) = \dfrac{\overline{KL}}{\overline{LM}}$

← On écrit le sinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$\overline{LM} = \dfrac{\overline{KL}}{\sin(\widehat{LMK})}$

← On applique la règle des produits en croix.

$\overline{LM} = \dfrac{7{,}2}{\sin(53°)}$

← On saisit :
7,2 ÷ 2nd->trig->sin 53

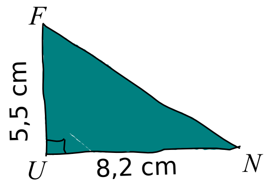
$\overline{LM} \approx 9$ cm.

← $\overline{LM}$ est supérieure à $\overline{KL}$. Le résultat est cohérent.

Calculer la mesure d'un angle

Exemple: soit ΔFUN un triangle rectangle en U tel que $\overline{UN}$ = 8,2 cm et $\overline{UF}$ = 5,5 cm.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.



Dans le triangle ΔFUN rectangle en U,
$[FU]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$;
$[UN]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$.
On doit utiliser la tangente de l'angle $\widehat{UNF}$.

← On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{\overline{UF}}{\overline{UN}}$

← On écrit la tangente de l'angle recherché.

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{5,5}{8,2} \Leftrightarrow \widehat{UNF} = \tan^{-1}\left(\dfrac{5,5}{8,2}\right)$

$\widehat{UNF} \approx 34°$

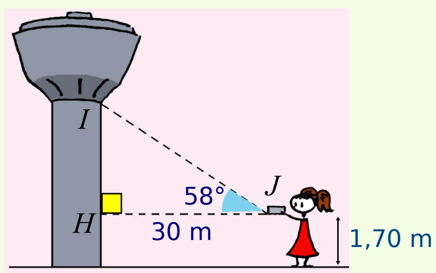
← On saisit :
2nd->trig->tan^{-1} (5,5 ÷ 8,2)

Voir les exercices 1 à 3

3 [A savoir] Résolution de problèmes à l'aide de la trigonométrie

Exemple : Juliette se trouve à une distance de 30 m d'un château d'eau et désire en connaître la hauteur. Elle mesure l'angle entre l'horizontale et le haut de la base d'un château d'eau grâce à un appareil placé à 1,70 m du sol et trouve 58°. Calculer la hauteur de la base du château d'eau arrondie au mètre.

On commence par faire un schéma :



La droite HI est perpendiculaire à l'horizontale.

Dans le triangle ΔHIJ rectangle en H, on a :

$\tan(\widehat{HJI}) = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{HJ}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan(58°) = \dfrac{\overline{HI}}{30}$

d'où : $\overline{HI}$ = 30 · tan(58°) ≈ 48,01 m. De plus : 48,01 +1,70 = 49,70 m

Donc, la hauteur du château d'eau est d'environ 50 mètres.

Voir les exercices 4 à 13

4 [A savoir] Valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente de certains angles

angle	sinus	cosinus	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Voir l'exercice 14

5 [A savoir] Théorèmes

Théorème (angles complémentaires)

Si α et β sont deux angles complémentaires, alors on a :

1. $\sin(\alpha)=\cos(\beta)$
2. $\cos(\alpha)=\sin(\beta)$
3. $\tan(\alpha)=\frac{1}{\tan(\beta)}$

Théorème (relation tan, sin et cos)

Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Théorème (relation fondamentale en trigonométrie)

Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

Remarque : pour simplifier l'écriture, on note l'expression $[\sin(\alpha)]^2$ plus simplement comme $\sin^2(\alpha)$; le carré s'applique donc bien à tout le nombre $[\sin(\alpha)]$.

6 [A savoir] Utiliser les formules de trigonométrie

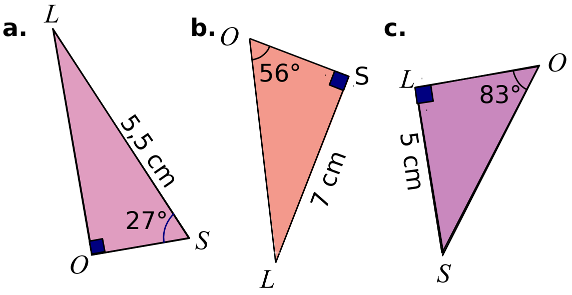
Exemple : calculer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sachant que α est un angle aigu tel que $\cos(\alpha) = 0,8$.

☐ $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ donc $\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha) = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36$.
Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin(\alpha) = \sqrt{0,36} = 0,6$.

☐ $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$.

Voir les exercices 15 à 16

1 Dans chaque cas, calculer la valeur arrondie au millième des longueurs manquantes :

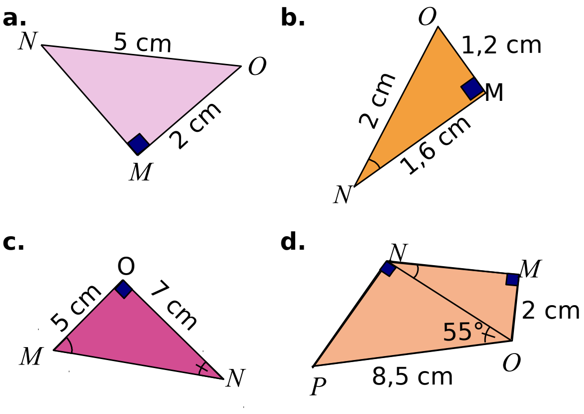


2 Construire un triangle ΔABC tel que $\overline{AB}$ = 4,5 cm, $\widehat{BAC}$ = 27° et $\widehat{CBA}$ = 63°.

d. Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?

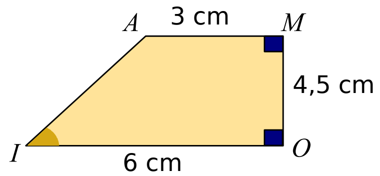
e. Calculer les longueurs $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ arrondies au millième.

3 Dans chaque cas, calculer la mesure de l'angle $\widehat{MNO}$; donner la valeur arrondie au degré.



Voir la théorie 1 à 2

4 À l'aide des informations de la figure, calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{AIO}$.



5 Quand le sommet de la tour Eiffel est vu d'une distance de 60m à partir de la base, l'angle d'élévation est de 79,2°.

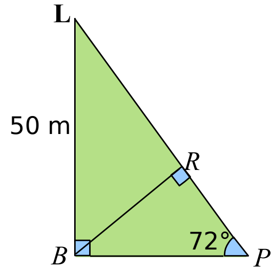
Estimer la hauteur de la tour Eiffel au mètre près.

6 Soit ΔHIJ un triangle rectangle en H . On a $\overline{IJ}$ = 4,75 cm et $\widehat{IJH}$ = 65,8° .

Calculer $\overline{IH}$, $\overline{JH}$ et $\widehat{JIH}$.

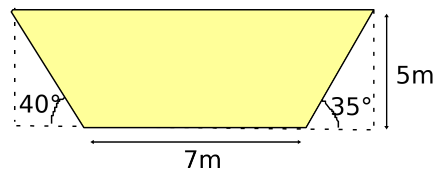
7 Rafaël et Léo nagent pour atteindre la bouée P. Ils sont respectivement en position R et L.

On a $\overline{BL}$ = 50 m et $\widehat{BPL}$ = 72°.



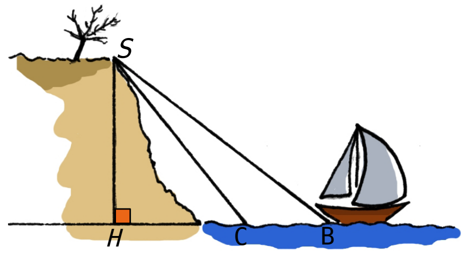
Calculer la distance entre les deux nageurs arrondie au mètre.

8 Calculer l'aire de ce trapèze :



9 Charlotte navigue le long d'une falaise. Pour des questions de sécurité, elle ne doit pas aller au delà du point C. Elle a jeté l'ancre au point B.

On a $\overline{SH}$ = 100m, $\widehat{HCS}$ =75° et $\widehat{HBS}$ =65°.

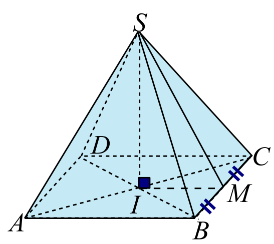


À quelle distance du point C le bateau de Charlotte se trouve-t-il ? Donner la valeur approchée par excès au mètre près.

10 Soit ΔEFG un triangle isocèle en F. On a $\overline{EG}$ = 42 cm et $\widehat{EFG}$ = 62°.

Calculer l'aire de ΔEFG .

11 $SABCD$ est une pyramide régulière dont la base est le carré $ABCD$ de côté 230 m et de centre I. La hauteur [SI] de la pyramide a pour longueur $\overline{SI}$ = 147 m. M est le milieu de [BC].

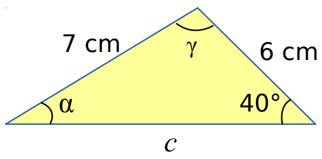


a. Calculer le volume de la pyramide.

b. Calculer les mesures des angles $\widehat{IAS}$ et $\widehat{SMI}$ arrondies au degré près.

12 Au centre d'un bassin carré de 12 mètres de côté se trouve un jet d'eau dont l'extrémité apparaît, depuis l'un des sommets du carré, sous un angle d'élévation de 52°. Quelle est sa hauteur?

13 Donner des approximations au millième des angles et longueurs manquants du triangle suivant :



Voir la théorie 3

14 Calculer en valeur exacte les côtés manquants des triangles $\Delta\,EFG$ rectangles en G dans les cas suivants :

a. $\widehat{FEG}=30°$; $\overline{EG}=3$

b. $\widehat{FEG}=45°$; $\overline{FG}=5$

c. $\widehat{FEG}=60°$; $\overline{EG}=9$

Voir la théorie 4

15 Soit $\Delta\,MOT$ un triangle rectangle en M.

a. Que peut-on dire des angles $\widehat{MTO}$ et $\widehat{TOM}$?

b. Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{MTO}$ et $\widehat{TOM}$ en fonction des côtés $\overline{MO}$, $\overline{OT}$ et $\overline{MT}$.

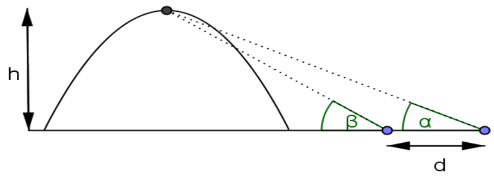
c. Utiliser la question **b.** pour écrire trois égalités.

d. Déduire de ces égalités deux propriétés sur les angles complémentaires d'un triangle rectangle.

16 Calculer la valeur exacte de $\sin(\beta)$ et de $\tan(\beta)$ sachant que β est un angle aigu tel que $\cos(\beta)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Voir la théorie 5 à 6

17 Pour déterminer la hauteur du Mont Ticule, Sophie a mesuré les angles α , β et la distance d. Calculer h en sachant que $\alpha=30°$, $\beta=45°$ et d = 200m.



18 P et Q sont deux points d'un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tels que $\widehat{AQP}=35°$. On donne $\overline{AB}=5$ cm.

a. Faire un croquis de la situation.

b. Déterminer l'angle $\widehat{ABP}$ et justifier.

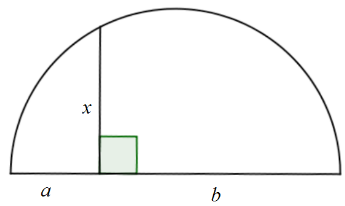
c. Quelle est la nature du triangle $\Delta\,APB$?

d. Calculer la longueur $\overline{AP}$.

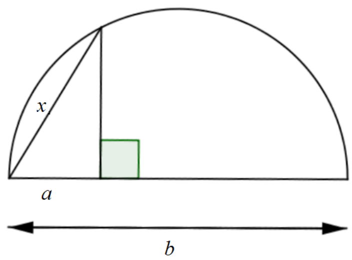
e. Déterminer l'angle $\widehat{POB}$ et justifier.

19 Pour chacune des figures ci-dessous, déterminer x. Dans les deux cas, il s'agit d'un demi-cercle.

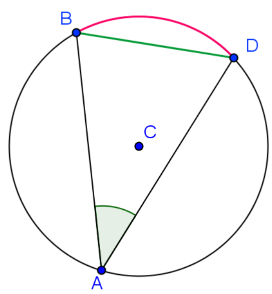
a.



b.



20 Soit un cercle de centre C et de rayon 10. Une corde $[BD]$ est regardée sous un angle de 20° depuis un point A du cercle. Calculer la longueur de la corde $[BD]$ et de l'arc $\widehat{BD}$.



EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

21 Quelle est la longueur de l'ombre projetée par un arbre de 12m de haut lorsque le Soleil est élevé de 52° au-dessus de l'horizon ?

22 Soit ΔRST un triangle rectangle en R. On a $\overline{ST}$ = 25,43 cm et $\overline{RT}$ = 12,30 cm.

Calculer $\widehat{RST}$ et $\overline{RS}$.

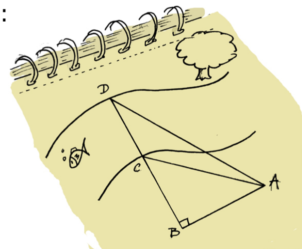
23 Elsa joue au cerf-volant sur la plage. La ficelle est déroulée au maximum et est tendue. L'angle de la ficelle avec l'horizontale est de 48°. Elle tient son dévidoir à 60 cm du sol. Le cerf-volant vole à 12 m du sol.

a. Faire un schéma de la situation.

b. Calculer la longueur de la ficelle déroulée. Donner la valeur arrondie au décimètre.

24 Monsieur Schmitt, géomètre, doit déterminer la largeur d'une rivière. Voici le croquis qu'il a réalisé :

$\overline{AB}$ = 100 m ;
$\widehat{BAD}$ = 60° ;
$\widehat{BAC}$ = 22° ;
$\widehat{ABD}$ = 90°.

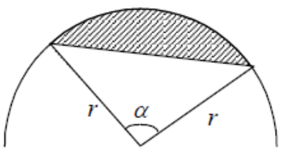


Calculer la largeur de la rivière à un mètre près.

25

a. Exprimer l'aire A de la surface hachurée en fonction de r et α .

b. Calculer A lorsque r = 10 cm et α = 60°.



26

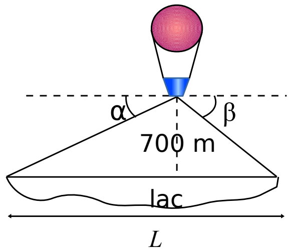
a. Calculer $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sachant que $\cos(\alpha)$ = 4/7.

b. Calculer $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sachant que $\sin(\alpha)$ = 3/8.

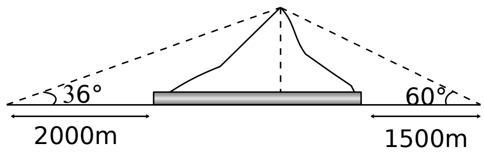
c. Calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sachant que $\tan(\alpha)$ = 6.

d. Calculer $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ sachant que $\sin(\alpha)$ = 4/3.

27 Un ballon vole à une altitude de 700 m en survolant un lac. Si les angles de dénivellation des rives du lac sont α = 48° et β = 39°, trouver la largeur L du lac.

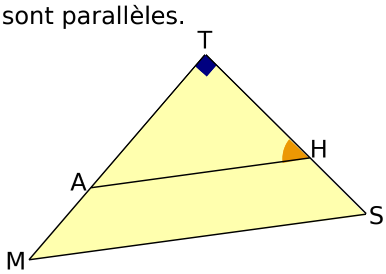


28 On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 3225m de haut. À une distance de 2000m de la base de la montagne l'angle d'élévation est de 36°. Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 1500m est de 60°.



Calculer la longueur du tunnel.

29 On considère le triangle ΔMTS tel que $\overline{MS}$ = 23cm et $\overline{TM}$ = 15cm. Les droites AH et MS sont parallèles.



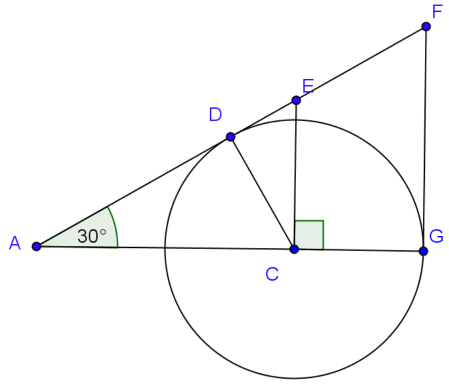
a. Écrire les rapports de longueurs qui sont égaux en justifiant.

b. Écrire la relation donnant le sinus de l'angle $\widehat{AHT}$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{AHT}$.

30 Calculer la valeur exacte de $\cos(\alpha)$ et de $\tan(\alpha)$ sachant que α est un angle aigu tel que $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

31 Soit un cercle de centre C et de rayon 6. De A, un point extérieur au cercle, part une demi-droite d_{AF} issue de A et tangente au cercle, D est le point de contact.



On a un triangle ΔCAD, un triangle ΔCAE avec CE perpendiculaire à CA, et un triangle ΔAGF avec G un point commun à CA et la tangente GF.

Calculer les longueurs des trois côtés de ces trois triangles.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

21 La longueur de l'ombre est de 9,4 m.

22 $\widehat{RST}$ ≈ 28,93° et RS ≈ 22.26 cm

23 La longueur de la ficelle est de 15,3 m.

24 La largeur de la rivière est de 133 m.

25

a.
$$A=\frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin(\alpha)=r^2\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\pi}{360°}-\frac{\sin(\alpha)}{2}\right)$$

b. A ≈ 9,06 cm².

26

a. $\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-(\frac{4}{7})^2}=\frac{\sqrt{33}}{7}$

et $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\sqrt{33}}{4}$

b. $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{55}}{8}$ et $\tan(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{55}}=\frac{3\cdot\sqrt{55}}{55}$

c. $\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{37}}=\frac{\sqrt{37}}{37}$ et $\sin(\alpha)=\frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}$

d. impossible car $\sin(\alpha)=\frac{4}{3}>1$

27 L ≈ 1495 m

28 La longueur du tunnel est ≈ 2801 m.

29

a. $\Delta ATH \sim \Delta MTS$

donc par Thalès : $\frac{TA}{TM}=\frac{AH}{MS}=\frac{TH}{TS}$

a. $\sin(\widehat{AHT})=\frac{TA}{AH}$

b. $\frac{TA}{TM}=\frac{AH}{MS} \Rightarrow \frac{TA}{AH}=\frac{TM}{MS}=\frac{15}{23}$

d'où $\widehat{AHT}=\sin^{-1}(\frac{TA}{AH})=\sin^{-1}(\frac{15}{23})\approx 41°$

30 $\cos(\gamma)=\frac{\sqrt{8+4\cdot\sqrt{3}}}{4}$ et $\tan(\gamma)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8+4\cdot\sqrt{3}}}$

31 ΔCAD est rectangle car $[AF$ est une tangente et on connaît le côté $\overline{CD}$ =rayon=6.

$\sin(30)=\frac{1}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{6}{\overline{AC}}$ donc $\overline{AC}=12$

$\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{12}$ et $\overline{AD}=6\sqrt{3}\simeq 19,4$

ΔCAE est rectangle car CE est perpendiculaire à CA et on connaît le côté $\overline{AC}=12$.

$\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{12}{\overline{AE}}$ et $\overline{AE}=8\sqrt{3}\simeq 13,9$

Par Pythagore, par exemple, on a $\overline{CE}=\sqrt{(8\sqrt{3})^2-12^2}=4\sqrt{3}\simeq 6,9$

ΔAGF est rectangle car GF est perpendiculaire à CA et on a $\overline{AG}=\overline{AC}+\overline{CG}=12+6=18$.

$\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}=\frac{18}{\overline{AF}}$ et $\overline{AF}=12\sqrt{3}\simeq 20,8$

$\sin(30)=\frac{1}{2}=\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{FG}}{12\sqrt{3}}$ et $\overline{FG}=6\sqrt{3}\simeq 19,4$.

« Elle (la géométrie) est, pour ainsi dire, la mesure la plus précise de notre esprit, de son degré d'étendue, de sagacité, de profondeur, de justesse. »

Jean le Rond d'Alembert, mathématicien et encyclopédiste français (1717-1783)

A savoir en fin de chapitre

Résolution de triangles

✔ connaître les rapports trigonométriques *sinus*, *cosinus* et *tangente* dans le triangle rectangle et savoir les utiliser pour calculer un angle ou un côté d'un triangle ;

✔ savoir utiliser la calculatrice pour déterminer des sinus/cosinus/tangentes et des angles ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Problèmes

✔ savoir repérer un triangle rectangle dans une figure géométrique pour résoudre des problèmes à l'aide de la trigonométrie ;

✔ savoir résoudre des problèmes à l'aide de la trigonométrie en commençant si nécessaire par faire un schéma ;

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 13

Valeurs exactes

✔ savoir calculer en valeurs exactes les cotés d'un triangle en utilisant les valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente de 30°, 45° et 60° ;

Voir la théorie 4 et l'exercice 14

Relations trigonométriques

✔ connaître les relations entre sinus,cosinus et tangentes des angles complémentaires ;

✔ connaître et savoir démontrer les formules : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$;

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 15 à 16

Problèmes mélangeant trigonométrie et géométrie

✔ utiliser à bon escient les outils géométriques et trigonométriques en fonction du problème donné : Pythagore, Thalès, angles et cercles, trigonométrie ;

Voir les exercices 17 à 20

Quelques exercices types en vidéo

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch10