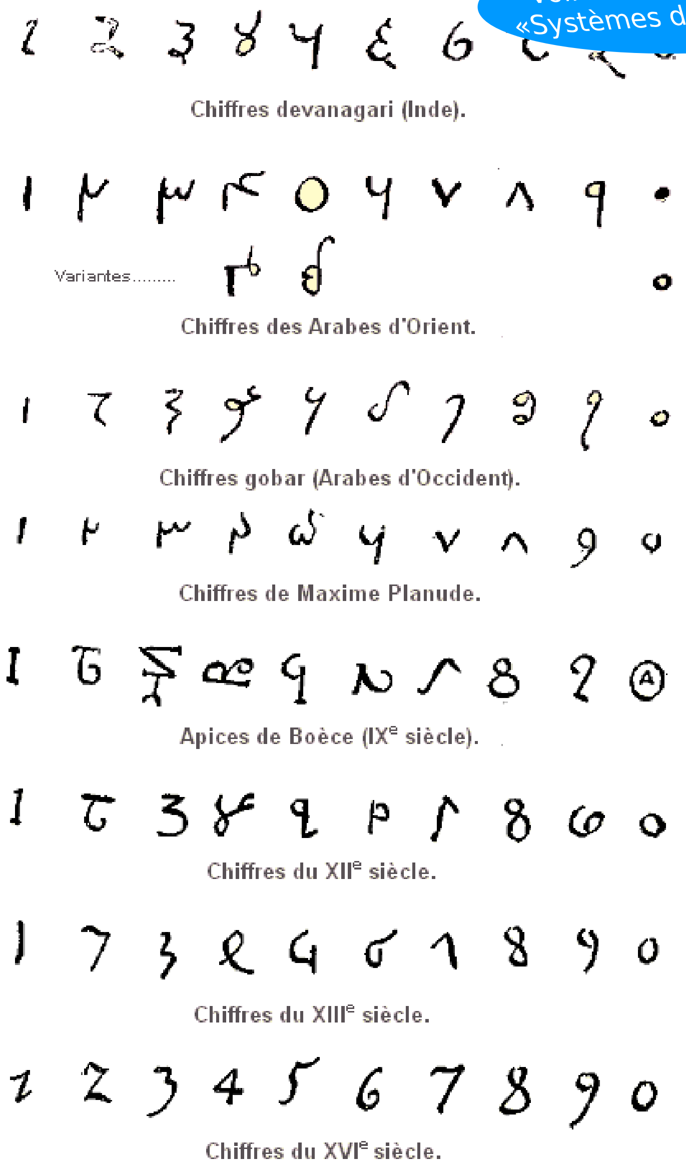
Chapitre 01 - Nombres

Voir aussi le complément «Systèmes de numération»[1]



Evolution de l'écriture des chiffres
Source: www.cosmovisions.com/chiffresChrono.htm

Problème

On note 3 ! (on prononce “3 factorielle”) le produit $1 \cdot 2 \cdot 3$, on note 4! le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ et ainsi de suite...
Si on calculait le produit 17 ! que trouverait-on pour les trois derniers chiffres ?
Par combien de zéros 627 ! se termine-t-il ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Les maths peuvent rapporter gros

La légende rapporte que le jeu d'échecs aurait été inventé par un sage indien, Sessa, fils de Daher, qui voulait rappeler à son souverain trop orgueilleux les principes de justice et d'équité avec lesquels il devait gouverner. Dans ce jeu, en effet, le Roi, quoique la pièce la plus importante, a toujours besoin de toutes ses troupes, même du plus humble de ses fantassins, pour se défendre et vaincre l'ennemi dans une bataille. Le prince aurait été si enchanté d'une leçon donnée de si belle manière, qu'il aurait manifesté le désir de remercier son ingénieux conseiller par un don exceptionnel. Prié de fixer lui-même sa récompense, le sage aurait alors demandé 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 grains pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant toujours le nombre de grains jusqu'à la soixante-quatrième et dernière case. Selon la légende encore, le prince ordonna de satisfaire immédiatement à une demande si modeste.

Que pensez-vous de sa stratégie ?
Indication : on pourra utiliser l'estimation $2^{10}=1024\simeq10^3$

2 [Souvenirs] Échauffement

1. Calculer $-(-7)+(-8-(7-11)-3(2-3\cdot5-(4\cdot(-2)-(-5)\cdot(-2))-1)-7)$.

2. Placer les parenthèses qui permettent de trouver le résultat indiqué :

a. $35+5:5-3+2\cdot4=16$

b. $35+5:5-3+2\cdot4=41$

c. $35+5:5-3+2\cdot4=28$

d. $35+5:5-3+2\cdot4=4$

3. Compléter :

a. 3; 4; 15; 26 sont des entiers ....

b. -67; 0 et 2 sont des entiers ....

c. l'opposé de -18 est ....

d. la .... de 5 et 8 est égale à 13

e. la .... de 4 et 9 est égale à -5

f. le .... de 8 et 6 est égal à 48

4. Sur votre calculatrice, il y a deux symboles « - ». A quoi servent-ils ?

5. Énoncer et justifier les **critères de divisibilité** par 2, 3 et 5. En connaissez-vous d'autres ?

6. Un chocolatier vient de confectionner 28313 pralinés identiques. Il a prévu de placer ces pralinés dans des boîtes contenant chacune 29 pralinés. Combien de boîtes parviendra-t-il à remplir au maximum et combien de pralinés non emballés restera-t-il ?

Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 12

3 [Souvenirs] Calculer avec les fractions

1. Calculer à la main et avec la calculatrice, et donner une réponse sous forme **irréductible** :

a. $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$

b. $\frac{5}{21}+\frac{12}{15}$

c. $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$

d. $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{6}\right)$

e. $\frac{120}{49}\cdot\frac{56}{144}$

f. $\frac{102}{23}\cdot\frac{100}{34}$

g. $\frac{25}{36}:\frac{5}{16}$

h. $\frac{33}{34}\cdot\frac{51}{66}\cdot\frac{12}{9}$

i. $-\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{16}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

2. Calculer $\dfrac{\frac{-14}{15}-\frac{17}{12}:\frac{1}{8}}{\frac{-4}{9}+1+\frac{1}{3}}$ directement à l'aide de la calculatrice (donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible et indiquer la séquence de touches utilisée).

3. Rendre irréductible :

a. $\frac{216}{720}$ **b.** $\frac{1122}{1496}$ **c.** $\frac{1826688}{829280}$

4. Exprimer en heures et fractions d'heures :

a. 75 minutes **b.** 55 minutes **c.** 66 minutes

4 [Souvenirs] Proportions

1. Combien faut-il changer de CHF pour obtenir 350 Euros au taux de change du jour (le chercher sur internet)?

2. Commenter cette annonce d'un journaliste : "Une nouvelle hausse de 15% sur le tabac interviendra le 1er septembre prochain qui, ajoutée à la hausse de 10% survenue le 1er mars, aura augmenté le prix du paquet de cigarettes d'un quart sur l'année".

3. Une poule et demi pond un œuf et demi en un jour et demi. Combien d'œufs pondront 12 poules en 12 jours ?

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 13 à 18

5 [Activité] Nombres rationnels

1. Écrire les fractions suivantes sous **forme décimale** :

a. $\frac{21}{5}$ **b.** $\frac{-2}{9}$ **c.** $\frac{20}{7}$ **d.** $\frac{20}{17}$

2. Écrire les **nombres décimaux** suivants sous forme de fractions irréductibles :

a. -2

b. 0,0

c. 12,347

d. 145,789678

e. $1,\overline{4}$

f. $21,3\overline{14}$

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 19 à 22

6 [Activité] Puissances

1. Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales à x^{12}:

a. $\dfrac{x^9}{x^3}$ **c.** $\dfrac{x^0}{x^{-12}}$ **e.** $\left(\dfrac{x^4}{x^2}\right)^6$

b. $(x^2)^{10}$ **d.** $x^0 \cdot x^{-12}$ **f.** xx^{1+10}

2. Transformer $0{,}0000045789$ en écriture scientifique, avec et sans calculatrice.

3. Calculer :

a. $\dfrac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2}$ **b.** $\dfrac{70^{632} \cdot 3^{598} \cdot 7^0 \cdot 2^{60} \cdot 75}{21^{599} \cdot (-5)^{634} \cdot 2^{692} \cdot 7^{33}}$ **c.** $\dfrac{(-1)^{987654321}}{(-1)^{123456786}}$

4. Simplifier le plus possible et donner une réponse sans exposants négatifs (a et b des rationnels non nuls) :

a. $\dfrac{(5a^3)^4 \cdot (b^4)^5}{(25 \cdot (ab)^4)^2 \cdot (b^2)^6 \cdot a^4}$ **b.** $\dfrac{(b^3)^{-4} \cdot (a^{-1} \cdot b^2)^5}{(b^2 \cdot b^3)^{-2} \cdot (b^6)^2} \cdot a^4$

7 [Aller plus loin] Puissance(s)

1. Selon les Indiens, le nombre de fils de Bouddha est dix mille milliards de milliards de milliards de milliards. Écrire ce nombre comme une puissance de 10.

2. Quel est le nombre le plus grand : 2^{400} ou 10^{100} ?

a. Essayer avec la calculatrice. Que déduire ?

b. Trouver une autre piste...

3. Déterminer le dernier chiffre de 2^{400} .

8 [Aller plus loin] Rêver ?

Dire d'un nombre qu'il est grand n'a guère de sens. Dans la vie primitive les objets usuels ou les événements familiers se comptaient sur les doigts des mains. De nos jours, les multiples opérations de codage de notre vie courante, du numéro minéralogique au numéro de téléphone, utilisent des nombres de six chiffres ou plus. Estimer les distances entre les astres du ciel ou le nombre de particules dans l'Univers conduit à des nombres encore plus grands. Vénus, la déesse de l'Amour, a servi de marraine à la planète qui est, hormis la Lune, le corps céleste le plus proche de la Terre. On peut souvent voir Venus de jour, avant même le coucher du Soleil ou tôt le matin. Son nom populaire est l'Étoile du Berger et sa distance au Soleil est d'environ 100 millions de kilomètres. Alpha Centauri est l'étoile la plus proche de la Terre, hormis le Soleil. 4,3 années-lumière nous séparent d'elle, soit environ 40 000 milliards de kilomètres.

Avec de tels nombres se pose la question de la notation et de l'ordre de grandeur. Cette idée est amorcée dans l'Arénaire d'Archimède (287 - 212 av. J.-C.). L'ouvrage intitulé l'Arénaire est rédigé sous la forme d'une longue lettre dans laquelle Archimède détrompe le roi Gélon de l'idée que l'on ne pourrait écrire un nombre assez grand pour représenter la quantité prodigieuse de grains de sable que contiendrait une sphère aussi grande que la sphère étoilée, et il démontre que ce nombre ne dépasserait pas en définitive le nombre qui, dans notre système de numération, serait représenté par 1 suivi de soixante-trois zéros. L'Arénaire se termine ainsi : « ... je conçois, roi Gélon, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières ; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la Terre, du Soleil et du Monde entier les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.»

Des nombres encore plus considérables apparaissent dans l'astrophysique actuelle. Certains astrophysiciens ont calculé que dans 10^{12} années toutes les étoiles seront éteintes, que dans 10^{1500} années toute la matière se métamorphosera en boules de fer et que dans $10^{10^{76}}$ années, lors d'un gigantesque feu d'artifice, toute la matière de l'Univers s'évaporera en lumière.

Les mathématiciens, de leur côté, font encore mieux. Dans des problèmes de dénombrement de la théorie des graphes, ils en arrivent à considérer, par exemple, le nombre de Folkman: $10^{10^{10^{10^{10}}}}$ Et cependant, rien n'empêche notre imagination de concevoir des nombres plus grands encore et de se faire ainsi une première idée de l'infini ...

Source: « Algèbre Mode d'emploi », G. Charrière, Ed.LEP

1. Quel est le nom de $10^{10^{10}}$?

2. Quel est le plus grand nombre que vous sachiez nommer ?

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 23 à 37

9 [Activité] Racines carrées

1. Vrai ou faux? Justifier.

a. $\sqrt{4}=\pm 2$ **b.** $\sqrt{a^2}=a$

2. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\sqrt{\dfrac{27}{75}}$ **b.** $\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{(0.64)^{2347}}}{\sqrt{(0.64)^{2247}}}$ **d.** $\sqrt{1,\overline{7}}$

3. En utilisant des décompositions en produits de facteurs premiers, extraire la racine carrée suivante : $\sqrt{324}$

4. Réduire la somme $\sqrt{12}+\sqrt{3}-2\sqrt{9}+(\sqrt{3})^3$

5. Transformer pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » puis simplifier au maximum :

a. $-\dfrac{9}{\sqrt{27}}$ **c.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$

b. $\dfrac{-4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **d.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{18}-3\sqrt{8}+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

10 [Activité] Irrationalité

1. Conjecture : $0,\overline{9}=1$. Vrai ou faux ?

2. Qu'est-ce qu'un **nombre irrationnel** ? Donner des exemples.

3. Déterminer les expressions qui, après avoir été évaluées, donnent un nombre rationnel :

$$\pi-\pi\,;\;3\cdot\sqrt{2}\,;\;1+5.5\,;\;\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{20}}\,;\;\frac{\pi}{5}\,;\;\frac{2}{0}\,;\;1024\,;\;\sqrt{\frac{50}{2}}$$

4. Qu'est-ce qu'un **nombre réel** ? Donner des exemples.

5. Démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction.

6. En déduire qu'il existe un nombre infini de nombres irrationnels.

7. Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

8. Comment sont « mélangés » les nombres rationnels et irrationnels ?

9. Que peut-on dire de π ? Quelle est sa définition ? Est-il irrationnel ?

10. Existe-t-il des nombres non réels ?

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 38 à 42

11 [Aller plus loin] La calculatrice, un outil bien maîtrisé ?

Ces exercices sont conçus pour la calculatrice officielle. Il s'agit, avec cette calculatrice, d'être le plus efficace et précis possible pour effectuer les calculs demandés (en utilisant si besoin des parenthèses ou les mémoires). Pour chaque calcul, vous devez être capable de décrire précisément (par exemple en donnant la suite de touches utilisée) la façon dont la calculatrice a été utilisée.

1. Calculer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de :

a. $4\cdot(2+3)$
b. $2^2\cdot 5$
c. $5\cdot\sqrt{4}$
d. $3\cdot\pi$
e. $0,25\cdot 0,5$
f. le quart de la réponse précédente
g. $\dfrac{-325.201569-2.82589}{42.52}$
h. $\dfrac{4.7\cdot(6.76-0.95)}{5.001}$

2. Effectuer les calculs suivants en utilisant l'écriture scientifique de la calculatrice :

a. $(7.28\cdot 10^5)\cdot(3\cdot 10^5)$
b. $(-7.28\cdot 10^{-5})\cdot(3\cdot 10^5)$

3. Simplifier le plus possible $\dfrac{49005}{6030}$ à l'aide de la calculatrice.

4. Calculer $\dfrac{2}{3\cdot 5}$ puis $\dfrac{2}{3}\cdot 5$

5. Comment la calculatrice traite-t-elle l'ordre des opérations ? Effectuer des calculs pour vérifier si l'ordre des opérations est le même que celui convenu par les mathématiciens.

6. Calculer $\frac{7}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}$ à l'aide de la calculatrice en donnant un résultat irréductible.

7. Convertir $\frac{135}{60}$ en nombre décimal et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

8. Utiliser la machine pour obtenir directement une estimation de $2\cdot\pi$ arrondie au millième.

9. Comment effectuer cette suite de trois calculs le plus efficacement possible avec la calculatrice ?

a. $3\cdot3$ **b.** $3\cdot3\cdot9$ **c.** $\sqrt{3\cdot3\cdot9}$

10. Peut-on retrouver, réutiliser, modifier un calcul effectué précédemment ?

11. Comment fait-on pour récupérer le résultat du dernier calcul, par exemple pour le réutiliser dans un nouveau calcul ?

12. Comment effectuer la répétition successive de la même opération, par exemple calculer les 8 premières puissances successives de 2 ?

13. Comment efface-t-on un message d'erreur ou la ligne en cours d'édition ?

14. Quelle différence y a-t-il entre les touches INS , DEL et CLEAR ?

15. Mettre 15 dans la 1re mémoire, puis utiliser la mémoire pour calculer $7\cdot15^2$ puis $\frac{7\cdot15^2}{4}$.

16. Comment réinitialiser la calculatrice ?

17. On considère l'expression $\frac{x+y-x}{y}$

a. La calculer à l'aide de la calculatrice pour $x=10^4$ et $y=10^{-4}$.

b. La calculer à l'aide de la calculatrice pour $x=10^6$ et $y=10^{-6}$.

c. La réduire algébriquement le plus possible (pour x et y quelconques).

d. Que peut-on conclure des calculs précédents ?

Voir les exercices 45 à 48

Méthodes et notions essentielles

1 [Souvenirs] Des entiers...

Définitions

- ☐ $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8$ et 9 sont les **chiffres**, avec lesquels on construit les **nombres**.
- ☐ $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ sont des **entiers naturels**.
- ☐ $\ldots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \ldots$ sont des **entiers relatifs**.
- ☐ La **somme** de deux entiers est le résultat de leur **addition**.
- ☐ Le **produit** de deux entiers est le résultat de leur **multiplication**.
- ☐ La **différence** de deux entiers est le résultat de leur **soustraction**.
- ☐ L'**opposé** d'un entier est le même entier auquel on a changé son signe.

Ordre des opérations et parenthèses

Pour calculer une expression arithmétique, on décide d'effectuer les différentes opérations en suivant l'ordre indiqué par les règles ci-dessous :

- ☐ les opérations à l'intérieur d'une paire de parenthèses qui ne contient pas de parenthèse
- ☐ les puissances (et les racines)
- ☐ les multiplications (et les divisions), de gauche à droite
- ☐ les additions et les soustractions, de gauche à droite

Le rôle principal des parenthèses dans l'écriture mathématique est de séparer les opérations les unes des autres. Si on n'avait pas de convention sur l'ordre des opérations, il faudrait mettre entre parenthèses chaque expression contenant une opération et les deux nombres s'y rapportant.

Remarque : Si, dans une écriture sans parenthèse, il ne reste que des additions et des soustractions, il faut effectuer ces opérations de gauche à droite.

Exemple 1 : calculer $7-2\cdot3+6$

En effectuant en premier la multiplication, on obtient 7 - 6 + 6, puis, de gauche à droite, on obtient 7.

Exemple 2 : calculer $-14-(2-4-(6-3)+(4-3-(1+2-(-6+2)-1)-7)+3)$

On traite les parenthèses les plus imbriquées en premier :

$$\begin{aligned}
&-14-(2-4-(6-3)+(4-3-(1+2-(-6+2)-1)-7)+3)\\
&=-14-(2-4-(3)+(4-3-(1+2-(-4)-1)-7)+3)\\
&=-14-(2-4-3+(4-3-(1+2+4-1)-7)+3)\\
&=-14-(2-4-3+(4-3-(6)-7)+3)\\
&=-14-(2-4-3+(4-3-6-7)+3)\\
&=-14-(2-4-3+(-12)+3)\\
&=-14-(2-4-3-12+3)\\
&=-14-(-14)\\
&=-14+14\\
&=0
\end{aligned}$$

2 [Souvenirs] Règle des signes

- ☐ Le produit de deux nombres positifs est un nombre positif [« plus fois plus = plus »].
- ☐ Le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif [«moins fois moins = plus»].
- ☐ Le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est un nombre négatif [«moins fois plus = moins» et «plus fois moins = moins»]

3 [Souvenirs] Multiples, diviseurs

Définitions

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a=b\cdot k$ où k est un entier relatif, alors on dit que **a est un multiple de b** ou **a est divisible par b** ou **b est un diviseur de a** ou **b divise a**.

Exemple

12 est divisible par 3, 3 est un diviseur de 12, 12 est un multiple de 3.

- Le **PGDC de deux entiers** est leur Plus Grand Diviseur Commun.
- Le **PPMC de deux entiers** est leur Plus Petit Multiple Commun.
- Deux entiers sont **premiers entre eux** si leur pgcd est égal à 1.
- Un entier différent de 0 et 1 est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs.
- Un entier qui n'est pas **premier** et différent de 0 et 1 est **composé**.
- 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés.
- Le **quotient** de deux entiers est le résultat de leur division.

4 [Souvenirs] Division euclidienne

Définition

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Effectuer la **division euclidienne de a par b**, c'est trouver deux entiers q et r tels que : $a=q\cdot b+r$ et $0\leq r<b$
q est le **quotient** et **r** le **reste** de la division euclidienne.

Exemple : effectuer la division euclidienne de 183 par 12.

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \hline 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On a donc : $183=12\cdot 15+3$ avec 3 le reste et 12 le quotient.

Voir les exercices 1 à 12

5 [Souvenirs] Fractions

Définition

Une **fraction** est un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul. On appelle p le **numérateur** et q le **dénominateur** de la fraction.

Exemples

- $\frac{2}{5};\frac{-2}{7};\frac{13}{-88};\frac{-4}{-2};\frac{0}{5}$... sont des fractions
- si $a\neq 0$, on a: $\frac{0}{a}=0$; par exemple, $\frac{0}{24}=0$. On parle alors de **fraction nulle**.
- $\frac{a}{0}$ n'est pas défini ; par exemple, $\frac{24}{0}$ et $\frac{0}{0}$ ne sont pas des fractions.

Définition (égalité de deux fractions)

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont **égales** si et seulement si $ad=bc$.

Exemple

$\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$ car $2\cdot 25=10\cdot 5$

Définitions

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Amplifier/simplifier une fraction

Amplifier une fraction, c'est multiplier le numérateur et le dénominateur par un même entier non nul.
Simplifier une fraction, c'est diviser le numérateur et le dénominateur par un même diviseur commun différent de 1.

Remarque : quand on amplifie ou simplifie une fraction, on obtient une nouvelle fraction égale à celle de départ.

Additionner ou soustraire des fractions

Pour additionner (ou soustraire) des fractions :
- ☐ on met les fractions au même dénominateur (en amplifiant l'une, l'autre ou les deux) ;
- ☐ on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Exemple : Calculer l'expression $-1+\frac{13}{30}-\frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : $\{30;60;90;120...\}$
Multiples de 12 : $\{12;24;36;48;60...\}$

← On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.

$\frac{-60}{60}+\frac{13\cdot 2}{30\cdot 2}+\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}$ ← On amplifie chaque fraction afin d'avoir le même dénominateur commun.

$=\frac{-60}{60}+\frac{26}{60}+\frac{55}{60}$ ← On effectue les multiplications d'entiers au numérateur et au dénominateur.

$=\frac{-60+26+55}{60}$ ← On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$=\frac{21}{60}=\frac{7}{20}$ ← On simplifie si possible.

Multiplier des fractions

Pour multiplier des fractions et obtenir un résultat irréductible, on peut :
- ☐ simplifier chaque fraction si nécessaire ;
- ☐ écrire la fraction comme « produit des numérateurs » sur « produit des dénominateurs » ;
- ☐ simplifier ;
- ☐ effectuer les multiplications.

Exemple : effectuer le produit $\frac{8}{60}\cdot\frac{18}{32}$ et donner le résultat sous forme irréductible.

$\frac{8}{60}\cdot\frac{18}{32}=\frac{2}{15}\cdot\frac{9}{16}$	⟵ On simplifie les fractions.
$=\frac{2\cdot 9}{15\cdot 16}$	⟵ On écrit la fraction comme « produit des numérateurs » sur « produit des dénominateurs ».
$=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 8}$	⟵ On simplifie la fraction (par 3 et par 2)
$=\frac{3}{40}$	⟵ On obtient la fraction finale irréductible.

Définition

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.
Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

Exemple : Donner les inverses des nombres 5, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{7}{3}$

L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$; l'inverse de $\frac{1}{3}$ est 3 ; l'inverse de $-\frac{7}{3}$ est $-\frac{3}{7}$

Remarques :

- l'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même ;
- si $\frac{a}{b}$ est une fraction non nulle ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), alors son inverse est la fraction $\frac{b}{a}$.

Définition (division des fractions)

Diviser par une fraction non nulle, c'est multiplier par son inverse.

Exemple : calculer $\frac{-8}{7}:\frac{5}{-3}$ et donner le résultat en simplifiant le plus possible.

$\left(\frac{8}{7}:\frac{5}{3}\right)$	⟵ On s'occupe d'abord du signe : le résultat est positif car il y a un nombre pair de facteurs négatifs.
$=\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{5}$	⟵ On multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième.
$=\frac{8\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{24}{35}$	⟵ On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en simplifiant si possible.

6 [Souvenirs] Proportions

Définition

On dit que deux grandeurs x et y **varient proportionnellement** si leur rapport est constant.

Exemple : Lorsqu'on achète des croissants à la boulangerie, le prix à payer est proportionnel au nombre de croissants achetés.

x (nombre de croissants)	y (prix à payer en CHF)
2	2,80
5	7,00
12	16,80

$\frac{2,80}{2}=\frac{7,00}{5}=\frac{16,80}{12}=\mathbf{1,40}$

Utiliser ou déterminer un pourcentage

Exemple : 25 filles et 20 garçons de deux classes de 2e ont effectué un devoir commun. 60 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne. Calculer le pourcentage d'élèves qui ont obtenu la moyenne dans l'ensemble de ces deux classes.

On calcule le nombre de filles qui ont obtenu la moyenne :

$$\frac{60}{100}\cdot 25 \text{ filles} = \frac{60\cdot 25}{100} \text{ filles} = 15 \text{ filles.}$$

On calcule le nombre de garçons qui ont obtenu la moyenne :

$$\frac{50}{100}\cdot 20 \text{ garçons} = \frac{50\cdot 20}{100} \text{ garçons} = 10 \text{ garçons.}$$

On calcule le nombre total d'élèves dans les deux classes : 25 + 20 = 45 élèves.

On calcule le nombre d'élèves ayant eu la moyenne : 15 + 10 = 25 élèves.

Nombre d'élèves qui ont obtenu la moyenne	25	p ?
Nombre TOTAL d'élèves	45	100

Pour connaître le pourcentage ...

La proportion 25/45 = p / 100 donne:
Donc : p = 25×100÷45
$p \approx 55,56$

Donc environ 56 % des élèves des deux classes ont obtenu la moyenne.

Voir les exercices 13 à 18

7 [A savoir] Écriture décimale

L'**écriture décimale** (ou **développement décimal**) d'un nombre est basée sur la décomposition de ce nombre en puissances de 10.

Exemple

2435,78 et -405,03 sont des nombres écrit en écriture décimale, car

$2435,78=2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+3\cdot 10^1+5\cdot 10^0+7\cdot 10^{-1}+8\cdot 10^{-2}$ et

$-405,03=-(4\cdot 10^2+0\cdot 10^1+5\cdot 10^0+0\cdot 10^{-1}+3\cdot 10^{-2})$

8 [A savoir] Nombres rationnels

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre écrit comme quotient de deux entiers relatifs (ou comme fraction).

Exemples

- ☐ $1,875$ est un nombre rationnel, car $1,875=\frac{1875}{1000}=\frac{15}{8}$
- ☐ $2,\overline{3}$ est un nombre rationnel, car $2,\overline{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

Notation : $2,\overline{3}=2,333...$, où le 3 se répète infiniment, se lit «2 virgule 3 périodique »

- ☐ $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On peut en effet démontrer qu'il n'est pas possible d'écrire ce nombre sous forme d'une fraction.

Théorème

La partie fractionnaire du développement décimal d'un nombre rationnel est toujours finie ou infinie périodique.
Réciproquement, un nombre dont la partie fractionnaire du développement décimal est finie ou infinie périodique est un nombre rationnel.

Transformations écriture décimale / écriture fractionnaire

Exemple 1 : Écrire $x=2,3\overline{4}$ sous forme de fraction irréductible.

$x=2,3\overline{4}$ donc $10x=23,\overline{4}$ et $100x=234,\overline{4}$	$\longleftarrow$	On trouve deux multiples de x pour lesquels la même période commence juste après la virgule.
$100x-10x=234,\overline{4}-23,\overline{4}$	$\longleftarrow$	On soustrait les deux nombres.
$90x=211$	$\longleftarrow$	On simplifie des deux côtés.
$x=\frac{211}{90}$	$\longleftarrow$	On trouve x et on simplifie si nécessaire.

Exemple 2 : Écrire $x=\frac{17}{6}$ sous forme décimale.

On effectue la division euclidienne de 17 par 6 :

$$\begin{array}{rr|l} & 17 & 6 \\ - & 12 & 2,8\overline{3} \\ & 50 & \\ - & 48 & \\ & 20 & \\ - & 18 & \\ & 2 & \end{array}$$

dès qu'on retrouve une deuxième fois un même reste déjà obtenu précédemment - ici, c'est 2 - le processus devient périodique

Exemple 3 : Écrire $x=\frac{200}{17}$ sous forme décimale.

On peut effectuer la division **à la main** afin de déterminer avec certitude la période ; le calcul est long et on trouve en fin de compte $x=11,\overline{7647058823529411}$.

Dans ce cas, la calculatrice ne permet pas de trouver le résultat exact, car la longueur de la période dépasse ses capacités de calcul en valeur exacte.

Remarque : pour une fraction quelconque, le processus de division peut

- soit s'arrêter au moment où on trouve un reste nul ; dans ce cas , le résultat de la division sera un nombre décimal fini,
- soit se répéter à partir d'un certain rang (dès qu'on retombe sur un reste déjà obtenu précédemment) ; dans ce cas, le résultat de la division sera un nombre décimal infini périodique.

Voir les exercices 19 à 22

9 [A savoir] Puissances

Définition « Puissance d'exposant entier positif »

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul. Alors on définit : $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (produit de n facteurs)
a^n est la n ième puissance de a ; a est appelé la **base** et n **l'exposant** de cette puissance.

Remarques

- a^2 se lit « a (au) carré », en référence à l'aire d'un carré de côté a.
- a^3 se lit « a (au) cube », en référence au volume d'un cube d'arête a.

Théorème« Propriétés des puissances »

Soit a et b deux nombres réels non nuls et n et m des entiers naturels non nuls, alors on a :

1 $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$

2 $(a^m)^n = a^{n \cdot m}$

3 $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Attention : en général $(a+b)^n \neq a^n + b^n$, par exemple : $49 = (3+4)^2 \neq 3^2 + 4^2 = 25$.
Remarque : Ce théorème reste vrai si n et m ne sont pas des nombres entiers naturels.

Exemple : Comparer $(5^3)^2$, $5^{(3^2)}$, 5^{2^3} , 5^7 et 25^3 .

On ramène tous les nombres à une même base ou à un même exposant pour pouvoir les comparer facilement:
$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$, $5^{(3^2)} = 5^9$, $5^{2^3} = 5^{(2^3)} = 5^8$, $25^3 = (5^2)^3 = 5^6$, d'où $(5^3)^2 = 25^3 < 5^7 < 5^{2^3} < 5^{(3^2)}$

Définition « Puissance d'exposant nul »

Soit a un nombre réel non nul. Alors on définit : $a^0 = 1$.

Remarque : 0^0 n'est pas défini

Définition « Puissance d'exposant entier négatif »

Soit a un nombre réel non nul et n un entier naturel. Alors on définit : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Exemple : calculer $(-2)^{-3}$

Avec les définitions de puissances et l'ordre des opérations : $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{(-8)}=-\frac{1}{8}$

Écrire en notation scientifique

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a\cdot 10^n$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est-à-dire **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule**, et où n est un nombre **entier relatif**.
Le nombre a est appelé **mantisse**.

Exemple 1 : écrire le nombre 6 430 en notation scientifique

$6430=6,43\cdot 10^3$ ⟵ On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique du nombre 6430 est donc $6,43\cdot 10^3$

Exemple 2 : écrire le nombre $-0,00370$ en notation scientifique

l'écriture scientifique du nombre $-0,00370$ est $-3,7\cdot 10^{-3}$

10 [A savoir] Pyramides de puissances

Définition

Nous interpréterons une **pyramide de puissances** x^{y^z} comme $x^{\left(y^z\right)}$.

Exemple 1 : calculer 2^{4^2} ?

$2^{4^2}=2^{\left(4^2\right)}=2^{16}=65536$, et donc $2^{4^2}\neq\left(2^4\right)^2=16^2=256$

Exemple 2 : avec combien de zéros s'écrit le nombre 10^{10^2} ?

$10^{10^2}=10^{\left(10^2\right)}=10^{100}$. Ce nombre s'écrit donc avec 100 zéros.

11 [Aller plus loin] Travailler avec des grands nombres

Comparer des grands nombres

Pour comparer deux grands nombres, on essaye de les transformer pour qu'ils aient soit la même base, soit le même exposant.

Exemple : comparer 3^{200} et 25^{100}

$25^{100}=(5^2)^{100}=5^{(2\cdot 100)}=5^{200}$ donc $25^{100}>3^{200}$

Calculer une grande somme

Confronté à une grande somme, on peut parfois la réduire astucieusement...

Exemple : calculer $1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{63}$

$$\begin{aligned}1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{63} &= (1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{63})(2-1)\\ &= 2+2^2+2^3+2^4+...+2^{63}+2^{64}-1-2-2^2-2^3-2^4-...-2^{63}\\ &= 2^{64}-1\end{aligned}$$

Estimer un grand nombre

Pour estimer un très grand nombre que la calculatrice ne permet pas de manipuler (error!), on peut le comparer à une puissance de 10. On utilise souvent l'approximation $2^{10}\simeq 10^3$.

Exemple : estimer 2^{2010}

$$2^{2010}=2^{(10\cdot 201)}=(2^{10})^{201}\simeq(10^3)^{201}=10^{603}$$

Voir les exercices 23 à 37

12 [A savoir] Racines carrées

Définition

La **racine carrée** d'un nombre positif ou nul a est le nombre **positif ou nul** b tel que $b^2=a$.

Notation

La racine carrée se note avec le symbole $\sqrt{\ }$, par exemple $\sqrt{12}$ pour la racine carrée de 12.

Exemples

$\sqrt{16}=4$, car $4\geq 0$ et $4^2=16$ [**et il est faux d'écrire que $\sqrt{16}=\pm 4$!**]

$\sqrt{-16}$ n'existe pas, car aucun nombre élevé au carré est égal à -16

Théorème « Propriétés des racines carrées »

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls et n un entier naturel non nul :

1 $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$

2 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

3 $\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n$

4 Si $b>0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention : en général $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; par exemple, $5=\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$.

Simplifier une expression contenant une ou plusieurs racines carrées

1 Effectuer les multiplications et divisions à l'aide des propriétés.
2 Extraire les facteurs carrés de la racine.
3 Ne pas laisser de racine au dénominateur (rendre le dénominateur entier).

Exemple 1a : simplifier $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ et $\sqrt{5}\cdot\sqrt{0{,}45}$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{3\cdot 27} = \sqrt{81} = 9$ $\sqrt{5}\cdot\sqrt{0{,}45} = \sqrt{5\cdot 0{,}45} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

Exemple 1b : simplifier les nombres $\sqrt{\dfrac{36}{25}}$ et $\dfrac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}}$

$\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$ $\dfrac{\sqrt{0{,}56}}{\sqrt{0{,}08}} = \sqrt{\dfrac{0{,}56}{0{,}08}} = \sqrt{\dfrac{0{,}56\cdot 100}{0{,}08\cdot 100}} = \sqrt{\dfrac{56}{8}} = \sqrt{7}$

Exemple 2 : écrire le nombre $\sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}$
$\sqrt{4^2\cdot 2}$ ← On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.
$\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2}$
$4\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ← On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

Exemple 3 : écrire $\sqrt{\dfrac{25}{7}}$ sous la forme d'un quotient, sans racine au dénominateur.

$\sqrt{\dfrac{25}{7}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$ → On décompose la racine carrée du quotient afin de simplifier le numérateur.

$\dfrac{5\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ → On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$ puis on applique la définition d'une racine carrée.

Réduire une somme/différence de racines carrées

Exemple : réduire la somme $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$.

$\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$ → On remarque que $\sqrt{5}$ est un facteur commun aux trois termes de la somme.

$(1 - 2 + 7)\sqrt{5}$ → On factorise par $\sqrt{5}$

$6\sqrt{5}$ → On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exemple : écrire $2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers relatifs, d étant le plus petit possible.

$2\sqrt{36\cdot 2} - 7\sqrt{9\cdot 2}$ → On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.

$2\sqrt{36}\cdot\sqrt{2} - 7\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$ → On décompose la racine carrée de chacun des produits.

$2\cdot 6\sqrt{2} - 7\cdot 3\sqrt{2}$ → On applique la définition d'une racine carrée.

$12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}$ → $\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.

$(12 - 21)\sqrt{2}$ → On factorise par $\sqrt{2}$

$-9\sqrt{2}$ → On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Rendre entier un dénominateur en « multipliant par le conjugué »

Exemple : Quel est le conjugué de $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$? Et de $(1-\sqrt{5})$?

Le **conjugué** de $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ est $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ et celui de $(1-\sqrt{5})$ est $(1+\sqrt{5})$.

Exemple : rendre entier le dénominateur de $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ et simplifier au maximum.

On **amplifie par le conjugué** du dénominateur et on utilise les propriétés des racines:

$$\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})\cdot\mathbf{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\mathbf{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=\frac{\sqrt{18}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{18}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2}$$
$$=\sqrt{54}+\sqrt{9}-\sqrt{36}-\sqrt{6}=\sqrt{9\cdot 6}+3-6-\sqrt{6}=3\sqrt{6}-3-\sqrt{6}=2\sqrt{6}-3$$

13 [A savoir] Irrationalité et nombres réels

Définition

Un **nombre réel** est un nombre dont le développement décimal est quelconque. Il peut donc être soit fini, soit infini périodique, soit infini non périodique.

Exemple

$1{,}875$, $1{,}87575757575...=1{,}8\overline{75}$, $1{,}12345678910111213141516 17...$ et -2 sont tous des nombres réels.

Définition

Un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est appelé **nombre irrationnel**.

Exemple

$1{,}1234567891011121314151617...$ est un nombre dont le développement décimal est infini et non périodique. Ce n'est donc pas un nombre rationnel.

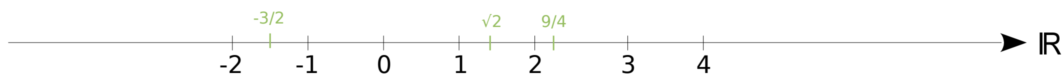
Théorème

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Remarque : la démonstration utilise le principe du **raisonnement par l'absurde**.

Droite réelle

On peut associer à tout point d'une droite un nombre réel, et réciproquement à tout nombre réel un point de la droite. Cela signifie que "les nombres réels recouvrent exactement la droite". Une telle droite est alors appelée la **droite réelle**.



Voir les exercices 38 à 44

Exercices d'entraînement

Calculs

1 Placer les parenthèses aux bons endroits, pour que les égalités suivantes soient vraies :

a. $1-2+3-4=0$

b. $-24-27-30-33=0$

c. $2\cdot3-4\cdot2-5-3=-6$

2 Calculer :
$-3-(9-(4-(-11+(1+8-(-25+23)))-1)-7)$

3 Compléter et donner un exemple numérique dans chaque cas.

a. Lorsque je calcule un(e) ...., je peux échanger de place les deux nombres sans modifier le résultat de l'opération.

b. Lorsque je calcule un(e) ...., le résultat de l'opération est modifié si j'échange de place les deux nombres.

4 Rechercher les étymologies des mots « chiffre », « nombre », « entier », « entier naturel » et « entier relatif ».

5 Déterminer le ppcm et le pgcd de 73644 et 10098.

6 Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Comment les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes (tous les élèves doivent être dans une équipe). Donner ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Expliquer la démarche.

7 Lors du tournage d'un film, le réalisateur dispose de 651 figurants habillés en noir et de 465 figurants habillés en rouge. Il doit former des équipes constituées de figurants vêtus de rouge et de figurants vêtus de noir de la manière suivante : dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en rouge ; dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en noir ; le nombre d'équipes doit être maximal. Quelle sera la composition d'une équipe ?

8 Parmi les nombres : 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 ; 6 139 et 900810, indiquer ceux qui sont divisibles :

a. par 2 **b.** par 3 **c.** par 5 **d.** par 9

9 Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre simultanément puis un second six par six, tous ensemble encore. Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifier.

10 Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

a. 63 par 4

b. 218 par 12

c. 3245 par 135

d. 32 par 50

11 Effectuer la division euclidienne de 934856 par 30464.

12 Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours. Combien cela représente-t-il de semaines ? S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

Voir la théorie 1 à 4

Fractions - proportions

13 Calculer à la main et avec la calculatrice, et donner une réponse irréductible :

a. $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{1}{4}$

b. $\frac{33}{44}\cdot\frac{24}{48}-\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)$

d. $\frac{112}{288}\cdot\frac{240}{96}$

e. $\frac{15}{64}:\frac{45}{16}$

f. $-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot\left(-\frac{18}{16}\right)$

g. $\dfrac{\frac{4}{9}-1-\frac{1}{3}}{\frac{14}{-15}-\frac{17}{12}:\frac{1}{8}}$

14 Pour faire un gâteau, je fais fondre une tablette de 100 g de chocolat dont la teneur en cacao est de 70 % avec une tablette de 200 g dont la teneur en cacao est de 85 %.

a. Calculer la masse de cacao contenue dans le mélange ainsi constitué.

b. Quel est le pourcentage de cacao dans ce mélange ?

15 Un TGV a parcouru 540 km à 240 km/h de moyenne. Calculer la durée du trajet et donner la réponse en heures, minutes et secondes.

16 Vrai ou faux ? Les deux offres publicitaires ci-dessous sont équivalentes :

a. BOUM SUR LES PRIX : 20% de réduction.

b. OFFRE SPECIALE : 25% de produit en plus.

17 Trois maçons montent un mur de 600 briques en une heure. En combien de temps, avec une efficacité identique, cinq maçons monteront-ils un mur de 1200 briques ?

Exercices d'entraînement

18 "L'essentiel dans l'usage des nombres, c'est de s'en former une idée nette ; quand je dis un, j'ai idée d'une seule chose existante et isolée ; quand je dis deux, c'est la même chose prise deux fois ; trois, c'est la même chose, prise trois fois ; et ainsi de suite. Il n'en est pas de même des fractions ; l'esprit les conçoit bien moins facilement que les nombres entiers ; si je dis une demie, je conçois la même chose, partagée en deux parties ; si je dis un tiers, il faut concevoir la même chose partagée en trois parties ; tant que je n'ai qu'une fraction, cela va bien ; mais quand je veux les comparer, cela n'est pas aisé, et vous verrez que, parmi les personnes qui n'ont pas exercé leur esprit à compter, il y en aura peu qui puissent vous dire sur-le-champ, de combien un demi est plus grand qu'un tiers, de combien un quart est plus grand qu'un cinquième, ... et vous avez vu, parce qu'on vous a dit qu'il faut faire un certain calcul pour les réduire au même dénominateur, notre esprit ne conçoit et ne compare facilement que les nombres fractionnaires dont le dénominateur est le même, parce qu'il regarde le dénominateur comme un tout dont il voit les différentes parties. Cet inconvénient n'a pas lieu dans l'arithmétique décimale..."

Joseph Louis Lagrange, (1736-1813)

a. Qui était Joseph Louis Lagrange ?

b. Illustrer avec nos notations son propos.

Voir la théorie 5 à 6

Nombres rationnels

19 Écrire sous forme de nombre décimal :

a. $\frac{1}{45}$ **c.** $\frac{2}{9}$ **e.** $\frac{31}{7}$

b. $\frac{0}{56}$ **d.** $\frac{34}{8}$ **f.** $\frac{453}{8}$

20 Écrire comme fraction irréductible :

a. 0,375 **c.** $0,\overline{027}$ **e.** $0,24\overline{9}$

b. $1,\overline{2}$ **d.** $0,\overline{65}$ **f.** $10,0\overline{13}$

21 Écrire sous forme décimale $\frac{256}{225}$.

22 Écrire $1,2\overline{23}$ sous forme de fraction irréductible.

Voir la théorie 7 à 8

Puissances

23 Écrire chacun des nombres suivants comme une puissance de 10 :

a. 100000 **b.** un milliard **c.** 1

24 « Mille milliards de mille sabords ! » disait le capitaine Haddock. Écrire ce nombre comme une puissance de 10.

25 Combien de temps faudrait-il pour écrire tous les nombres de 1 à un million en admettant qu'on écrive trois chiffres par seconde en moyenne ?

26 Combien faudrait-il de chiffres pour écrire sous forme décimale $10^{10^{10^{10^{10}}}}$?

27 Quel est le plus grand nombre, 27^{2000} ou 243^{1200} ?

28 Par quel chiffre se terminent les nombres suivants ?

a. 2^{100} **b.** 11^{101} **c.** $17 \cdot 2^{53}$

29 Un automate effectue deux fonctions : il élève un entier donné au cube et il divise un entier donné par 8. En commençant par le nombre 2, peut-on obtenir à l'aide de cet automate les nombres :

a. 64 ? **b.** 2^{2010} ?

30 Quel est le plus grand nombre entier que votre calculatrice puisse manipuler ?

31 Écrire sous la forme la plus simple possible (a un nombre réel non nul) :

a. $\frac{1}{a^{-1}}$ **b.** $(-a)^4$ **c.** $-a^4$ **d.** $(-a)^3$ **e.** $-a^3$ **f.** $(-a)^{-2}$ **g.** $-a^{-2}$ **h.** $(-a)^{-3}$ **i.** $-a^{-3}$

32 Simplifier le plus possible en donnant une réponse sous forme de fraction irréductible :

a. $\frac{18^3 \cdot 14^2}{42^3 \cdot 3^4}$ **d.** $\frac{64 \cdot 2^5}{4^5}$

b. $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5$ **e.** $-1 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-1)$

c. $\frac{5^7 \cdot 2^7}{10000}$ **f.** $-1 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{2}{5} \cdot (-3)$

33 Simplifier le plus possible et de sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif dans la réponse (a et b des réels, b non nul) :

$$\frac{(b^4)^{-3}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-5}}{(b^3\cdot b^2)^{-1}\cdot(b^5)^3}\cdot a^8$$

34 Simplifier au maximum les puissances dans les expressions suivantes :

a. $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$

b. $\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^a\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^b}{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^b\right)^a}$

c. $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$

d. $(2x^2y^{-5})(6y)(\frac{1}{3}x^{-1})$

e. $\left(\frac{2r^3s}{s^5}\right)^3\cdot\left(\frac{3s^2s}{r^4}\right)^2$

35 Soit $a=0,0004$.
Écrire en notation scientifique :

a. a **c.** a^{-3} **e.** 10^8a^{-6}

b. a^4 **d.** a^{-1} **f.** $10^{2597}a^{650}$

36 Écrire en puissances de 10 et simplifier :

a. $0,07\cdot3000\cdot0,002\cdot0,1\cdot50$

b. $0,000025\cdot20000\cdot0,0003\cdot0,004\cdot7000000$

37 Classer par ordre croissant :

$$x_1=10^{10^{10^{10}}};x_2=10^{10^{11}};x_3=10^{100^{10}};$$
$$x_4=100000^{100};x_5=1^{100000^{100000}}$$

Voir la théorie 9 à 11

Irrationnels, réels, racines

38 Calculer lorsque cela est possible, donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

a. $\sqrt{-36}$ **e.** $\sqrt{25-16}$

b. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ **f.** $\sqrt{\frac{1}{-1}}$

c. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4$ **g.** $(\sqrt{2})^{10}$

d. $-\sqrt{144}$ **h.** $\sqrt{0,1}$

39 En utilisant des décompositions en produits de facteurs premiers, extraire les entiers des racines carrées suivantes :

a. $\sqrt{784}$ **b.** $\sqrt{7056}$

c. $\sqrt{52}$ **f.** $\sqrt{450}$

d. $\sqrt{7840}$ **g.** $\sqrt{12321}$

e. $\sqrt{9801}$ **h.** $\sqrt{108}$

40 Transformer $\frac{4}{\sqrt{8}}$ pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur ».

41 Simplifier au maximum :

a. $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}$ **c.** $\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{7}{32}}$

b. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{\frac{1}{27}}$ **d.** $\sqrt{50}-2\sqrt{8}-7\sqrt{2}$

e. $\sqrt{27}-2\sqrt{3}+7\sqrt{12}$

f. $\sqrt{18}+\sqrt{20}+6\sqrt{5}-3\sqrt{32}$

42 Écrire les nombres suivants avec des dénominateurs entiers :

a. $\dfrac{-1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ **e.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **f.** $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ **g.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$

d. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **h.** $\dfrac{9}{\sqrt{18}}$

43 Calculer et simplifier le résultat :

a. $\dfrac{\sqrt{2^{10}-2^8}}{16\sqrt{6}}$ **b.** $\sqrt{\frac{27}{2}}\left[\sqrt{6}-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3\right]$

44 Classer par ordre croissant (a est un nombre réel strictement positif) :

$$a,\frac{1}{a},\sqrt{a},\frac{1}{\sqrt{a}},a^2,\frac{1}{a^2},a^3,\frac{1}{a^3}$$

Voir la théorie 12 à 13

Calculatrice

45 Effectuer les calculs suivants avec la calculatrice. Donner un résultat arrondi au millième :

a. $\dfrac{(-3211,08-432,44)\cdot(61,7)}{1,12\cdot(-0,56)}$

b. $\dfrac{-93,1}{-12,345+905,78}$

Exercices d'entraînement

46 On considère le nombre :

$$\sqrt{10^{16}+4\cdot10^{-16}-(10^{8}-2\cdot10^{-8})^{2}}$$

a. Le calculer à l'aide de la calculatrice.

b. Développer à l'aide d'une identité remarquable le nombre $(10^{8}-2\cdot10^{-8})^{2}$

c. Le calculer en utilisant le résultat du **b.** et sans utiliser la calculatrice.

d. Comparer avec le résultat du **a.** et conclure.

47 Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre $1234567899^{2}-1234567898^{2}$

a. Que pensez-vous du résultat ?

b. Sans calculatrice, calculer ce nombre à l'aide de l'identité remarquable « différence de deux carrés » : $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$.

c. Que peut-on déduire des calculs précédents ?

48 Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre :

$123456789^{2}-123456787\cdot123456791$

a. Poser $x=123456789$ et exprimer ce nombre en fonction de x .

b. Développer et réduire l'expression trouvée en **a.**

c. Que peut-on déduire des calculs précédents ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

49 Calculer en détaillant les étapes :

a. 6·[13 – (5 – 2)]

b. [(8 – 10)·8] · 4 + 8

c. [(31 – 5) – 2·7] - 6 · 2

d. 3,4 + [3·(8 - 5)] · 2·3 + 2,6

50 Calculer en détaillant les étapes :

a. 21 + 8·2 – [2 + (13 – 9)·3] – (10 – 6)

b. [3·7 – (18 – 9)]·2 + [(9·3) + 1] – 8

51 Si cela est nécessaire, placer des parenthèses pour que les égalités ci-dessous soient vraies. Attention, ne pas mettre de parenthèses inutiles !

a. $4\cdot3-5-2=5$

b. $8-3\cdot6+4=50$

c. $12+4\cdot7\div2=20$

d. $14\cdot4+7\div2=77$

52 Écrire chacun des nombres suivants comme une puissance de 10 :

a. cent mille milliards

b. mille milliards de millions

53 Calculer $3^{2^{4}}$.

54 Réécrire les expressions suivantes en simplifiant le résultat.

a. $(-5)^{3}\cdot(-5)\cdot(-5)^{4}$

b. $3^{4}\cdot(-2)\cdot3^{2}\cdot(-2)^{3}$

c. $7^{2}\cdot(7^{3})^{4}$

d. $(7^{2}\cdot7^{3})^{4}$

e. $\left((-4)^{2}\cdot5\cdot(-2)^{4}\right)^{3}$

f. $\left((5^{2})^{3}\cdot3^{4}\right)^{2}$

55

a. Écrire la liste de tous les diviseurs de 6.

b. Calculer la somme de tous ces diviseurs à l'exception de 6.

c. Que remarque-t-on ?
On appelle **nombre parfait** tout entier qui a cette particularité.

d. Vérifier que 496 est un nombre parfait.

e. Trouver tous les nombres parfaits compris entre 20 et 30.

56 Combien peut-on trouver d'entiers naturels inférieurs à 1000 dont le reste est 12 dans la division euclidienne par 25 ?

57 Effectuer les calculs suivants en donnant un résultat irréductible :

a. $\frac{5}{6}+\frac{-1}{3}$

b. $\frac{7}{9}-\frac{1}{-27}$

c. $-\frac{8}{5}+\frac{23}{50}$

d. $\frac{45}{15}-\frac{7}{3}$

e. $\frac{4}{11}+2$

f. $\frac{8}{-91}+\frac{-1}{7}$

g. $\frac{5}{2}-\frac{-45}{4}+\frac{2}{8}$

h. $4-\frac{5}{-49}+\left(-\frac{8}{7}\right)$

i. $\frac{-7}{50}+\frac{2}{75}$

j. $\frac{1}{5}+\frac{-2}{3}$

k. $\frac{1}{12}-\frac{1}{9}$

l. $\frac{4}{18}+\frac{5}{27}$

m. $\frac{17}{-24}+\left(-\frac{5}{36}\right)$

n. $\frac{3}{16}-\frac{-1}{12}$

o. $\frac{8}{-17}-\left(-\frac{1}{15}\right)$

58 Simplifier lorsque c'est possible puis calculer les produits :

a. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{11}$

b. $\frac{3}{5} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{5}{2}$

c. $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}$

d. $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{3}$

e. $\frac{45}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{7}$

f. $6 \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{11}{12}$

g. $\frac{5{,}5}{3} \cdot \frac{9}{7{,}7}$

h. $6 \cdot \frac{2{,}8}{3} \cdot \frac{5}{0{,}7}$

i. $0{,}6 \cdot \frac{2}{3{,}6}$

j. $\frac{17}{12{,}5} \cdot \frac{2{,}5}{1{,}7}$

59 Calculer les produits suivants en simplifiant, puis donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

a. $\frac{-7}{25} \cdot \frac{-5}{8}$

b. $\frac{18}{-49} \cdot \frac{14}{27}$

c. $\frac{45}{28} \cdot \frac{7}{-15}$

d. $\frac{-2}{6} \cdot \left(-\frac{21}{11}\right)$

e. $\frac{21}{32} \cdot \frac{108}{49}$

f. $-26 \cdot \frac{-5}{39}$

g. $\frac{8}{5} \cdot \frac{-5}{21} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)$

h. $\frac{56}{-5} \cdot \frac{30}{21} \cdot \frac{7}{10}$

60 Effectuer les calculs :

a. $\frac{2}{3} \div 5$

b. $\frac{-5}{7} \div (-4)$

c. $\frac{5}{6} \div \frac{7}{-11}$

d. $8 \div \frac{1}{8}$

e. $\frac{-3}{2} \div \frac{-5}{7}$

f. $\frac{1}{10} \div \left(-\frac{7}{9}\right)$

g. $\frac{8}{-15} \div \frac{-4}{5}$

h. $\frac{9}{10} \div (-3)$

i. $\frac{-4}{45} \div \frac{16}{15}$

j. $\frac{-5}{6} \div \left(-\frac{15}{18}\right)$

k. $12 \div \frac{3}{-4}$

l. $1 \div \left(\frac{-7}{4}\right)$

61 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $A = \frac{24 \times 9 \times 72 \times 121}{36 \times 33 \times 64}$

b. $B = 56 \times \frac{15}{128} - \frac{1}{18}$

c. $C = \left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times \frac{20}{33}$

62 Calculer et donner la réponse sous forme irréductible :

a. $\frac{81}{63} \div \left(4 - \frac{2}{14}\right)$

b. $\frac{56}{15} \cdot \frac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$

c. $3 + \frac{2}{15} \cdot \left(5 \cdot \frac{23}{25} - \frac{12}{49} \div \frac{9}{14}\right) \div \frac{1}{70}$

d. $\left(3 + \frac{3}{5} - \frac{7}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right)$

e. $\frac{\frac{-1}{2} - \frac{2}{-3}}{\frac{3}{5} - \frac{-2}{-8}}$

f. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3}}$

g. $-\frac{4}{31} \cdot \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{11}{6}\right) - \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{3}\right)\right)$

63 Écrire comme fraction irréductible :

a. -2,455

b. 0,2324

c. $1{,}\overline{3}$

d. $1{,}2\overline{3}$

e. $-1{,}234\overline{343}$

64 Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $1{,}1\overline{3} + 4{,}\overline{7}$

b. $0{,}\overline{75} + 0{,}\overline{26}$

c. $7 \cdot 0{,}\overline{16}$

d. $0{,}\overline{45} \cdot 0{,}\overline{3}$

e. $(1{,}8\overline{5})^2$

65 "Il était une fois un honorable caravanier de Boukhara qui élevait ses trois fils dans un esprit empreint à la fois de rigueur et de tolérance. Lors d'une violente tempête de sable dans le désert du Kyzylkoum, il mourut d'épuisement non sans avoir eu le temps de rédiger son testament. Les rares rescapés de cet événement, une fois de retour au caravansérail, remirent ce testament aux trois fils affligés. En plus des legs obligatoires fixés par la loi, ils reçurent dix-sept chameaux. Mais à ce propos, les directives paternelles paraissaient très précises :

"Vous partagerez les chameaux entre vous trois : au plus vieux la moitié, au deuxième par l'âge le tiers, au plus jeune le neuvième".

Mais très rapidement les fils réalisèrent l'impossibilité du partage. Comme à l'accoutumée, en fin d'après-midi, ils se rendirent à la maison de thé et demandèrent conseil. Les réponses fusèrent :

"Vendez les chameaux et partagez-vous l'argent !", "Le testament est nul et non avenu, ses dispositions sont inexécutables.", "Vous devez rester collectivement propriétaires du troupeau !", "Ce testament pose un problème insoluble !", "Faites le partage qui se rapproche le plus des volontés de votre père !"," Donnez donc les chameaux à plus pauvre que vous !".

A la tombée du jour, la discussion, interminable et oiseuse, n'avait toujours pas apporté une solution satisfaisante, les trois frères désirant avant tout respecter le plus scrupuleusement possible les indications de leur père. C'est alors qu'apparut, à califourchon sur son âne, Nasreddin Affandi, l'homme considéré comme le plus sage de tout le Khworezm. Tous estimèrent qu'il serait bon de s'en remettre à son jugement. On lui demanda donc son avis sur l'affaire. Il réfléchit longuement, tout en caressant sa belle barbe frisée. Son âne, impatient, se mit à braire. C'est alors que Nasreddin prit la parole, en s'adressant aux trois héritiers :

"Je ne possède qu'un seul chameau, mais je l'ajouterai volontiers au dix-sept qui vous reviennent. Toi, l'aîné, tu en recevras la moitié, soit neuf chameaux. Toi, le deuxième, tu en prendras le tiers, ce qui fait six chameaux. À toi, le plus jeune, reviendra un neuvième du tout, soit deux chameaux. Chacun d'entre aura donc reçu plus qu'il n'en espérait et si je compte bien, cela fait dix-sept. Le chameau restant, qui n'est autre le mien, que je le reprendrai."

Assénant quelques rapides coups de talons dans les flancs de son bourricot, il disparut bien avant que tous les auditeurs eurent apprécié la sagesse de ses paroles ..."

Source :
Algèbre mode d'emploi, G Charrière, Ed. LEP

Expliquer cette apparente contradiction.

66 Le taux de change du jour est de 1 euro pour 1,075 CHF. Combien faut-il d'euros pour obtenir 2000 CHF ?

67 En France, la vitesse maximale autorisée sur autoroute est 130 km/h. Convertir cette vitesse en m/s.

68 Le tableau suivant donne la longueur de l'orbite de quatre planètes de notre système autour du Soleil (en km) ainsi que le nombre de jours qu'elles mettent pour parcourir cette orbite.

Planète	Orbite en km	Révolution en jours
Mercure	$3{,}6 \cdot 10^8$	88
Terre	$9{,}2 \cdot 10^8$	365
Mars	$1{,}4 \cdot 10^9$	687
Uranus	$1{,}8 \cdot 10^{10}$	30 708

Exprimer la vitesse de chaque planète sur leur orbite en m/s et en km/h.

69 Calculer, sans calculatrice, les expressions :

a. $A = 3 \cdot 2^4 + 5 \cdot 4^3$

b. $B = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$

c. $C = 1 - 3^2 \cdot (-5)^2$

d. $D = 2^3 \cdot (-9) + 3^3 - (5^2 + 2^{-1})$

70 Écrire sous la forme d'une puissance :

a. $3^4 \cdot 3^2$

b. $4^3 \cdot 4^{-5}$

c. $(-5)^{-4} \cdot (-5)^{-3}$

d. $\dfrac{2^4}{2^5}$

e. $\dfrac{3^2}{3^{-3}}$

f. $\left(7^2\right)^3$

g. $\left(4^{-2}\right)^3$

h. $\left((-1)^2\right)^{-3}$

i. $7^5 \cdot 2^5$

j. $3^{-4} \cdot 5^{-4}$

k. $8^3 \cdot 4^3$

71 Écrire chaque expression sous la forme d'une puissance de 10 :

a. $\left(10^9\right)^4$

b. $\dfrac{10^{-4}}{10^9}$

c. $10^{12} \cdot 10^{-8} \cdot 10^5$

d. $\dfrac{10^{-6}}{10^6}$

e. $\dfrac{10^{41} \times 10^7}{10^{-39}}$

72 Écrire chaque expression sous la forme d'une puissance de 10 :

a. $10^{-9} \cdot 10^{12}$

b. $\dfrac{10^{-7}}{10^8}$

c. $\left(10^{-3}\right)^{-6}$

d. $\dfrac{10^{10}}{10^{-5}}$

e. $\dfrac{10^{21}}{10^{-4} \times 10^{-18}}$

73 Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

a. 7 283

b. 25 000

c. 654,98

d. 12,47

e. 0,005 8 **h.** $159 \cdot 10^{-5}$

f. 0,000 149 **i.** $0{,}009 \cdot 10^{-7}$

g. $0{,}67 \cdot 10^{2}$

74 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une écriture scientifique, puis décimale :

a. $150 \cdot 10^{3} \cdot 8 \cdot 10^{5}$

b. $2 \cdot 10^{3} \cdot 5 \cdot (10^{-5})^{2}$

c. $3 \cdot 10^{8} \cdot 4 \cdot 10^{-5}$

d. $2 \cdot 10^{9} \cdot 7 \cdot 10^{-6}$

e. $3 \cdot 10^{2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

f. $5 \cdot 10^{2} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-6}$

75 Calculer et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^4} : \frac{\left(\frac{1}{-2}-\frac{-1}{4}\right)^5}{\left(1+\frac{2}{-3}\right)^3}$$

76 Calculer et simplifier :

a. $\left(1-\sqrt{5}\right)^2$ **b.** $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

77 Rendre le dénominateur entier :

a. $\frac{4}{\sqrt{12}}$ **b.** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **c.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

49

a. 60 **b.** -56 **c.** 0 **d.** 60

50 Calculer en détaillant les étapes.

a. 19 **b.** 44

51

a. $4 \cdot 3-5-2=5$ **c.** $(12+4 \cdot 7) \div 2=20$

b. $(8-3) \cdot (6+4)=50$ **d.** $14 \cdot (4+7) \div 2=77$

52

a. 10^{14} **b.** 10^{18}

53 $3^{2^4}=3^{16}=43046721$

54

a. 5^{8} **b.** $3^{6} \cdot 2^{4}$ **c.** 7^{14}

d. 7^{20} **e.** $5^{3} \cdot 2^{24}$ **f.** $5^{12} \cdot 3^{8}$

55

a. 1,2,3 et 6. **b.** 6.

c. Cette somme est égale au nombre initial

d. 1+2+4+8+16+31+62+124+248=496

e. 28 est le seul parfait entre 20 et 30.

56 40

57

a. $\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{26}{11}$ **i.** $\frac{-17}{150}$ **m.** $\frac{-61}{72}$

b. $\frac{22}{27}$ **f.** $\frac{-3}{13}$ **j.** $\frac{-7}{15}$ **n.** $\frac{13}{48}$

c. $\frac{-57}{50}$ **g.** 14 **k.** $\frac{-1}{36}$ **o.** $\frac{-103}{255}$

h. $\frac{145}{49}$

d. $\frac{2}{3}$ **l.** $\frac{11}{27}$

58

a. $\frac{10}{77}$ **d.** $\frac{1}{5}$ **g.** $\frac{15}{7}$ **j.** 2

b. $\frac{39}{14}$ **e.** $\frac{15}{7}$ **h.** 40

i. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{9}{55}$ **f.** $\frac{1}{16}$

59

a. $\frac{7}{40}$ **c.** $-\frac{3}{4}$ **e.** $\frac{81}{56}$ **g.** $\frac{3}{14}$

b. $-\frac{4}{21}$ **d.** $\frac{7}{11}$ **f.** $\frac{10}{3}$ **h.** $-\frac{56}{5}$

60 .

a. $\frac{2}{15}$ **e.** $\frac{21}{10}$ **i.** $-\frac{1}{12}$

b. $\frac{5}{28}$ **f.** $-\frac{9}{70}$ **j.** 1

k. - 16

c. $\frac{-55}{42}$ **g.** $\frac{2}{3}$ **l.** $\frac{-4}{7}$

d. 64 **h.** $-\frac{3}{10}$

61

a. $\frac{99}{4}$ **b.** $\frac{937}{144}$ **c.** $\frac{20}{11}$

Exercices d'entraînement

62

a. $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1907}{45}$ **d.** $-\frac{181}{400}$ **f.** $\frac{7}{6}$

b. $-\frac{4}{3}$ **e.** $\frac{10}{21}$ **g.** $-\frac{1}{3}$

63

a. $-\frac{491}{200}$ **c.** $\frac{4}{3}$ **e.** $-\frac{1233109}{999000}$

b. $\frac{581}{2500}$ **d.** $\frac{37}{30}$

64

a. $\frac{266}{45}$ **c.** $\frac{112}{99}$ **e.** $\frac{27889}{8100}$

b. $\frac{101}{99}$ **d.** $\frac{5}{33}$

65 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$

66 ≃1194 ,03 euros.

67 ≃36.1 m/s.

68

a. Mercure $\simeq 170454\, km/h$ $\simeq 170454\, km/h$

b. Terre $\simeq 105022\, km/h$ $\simeq 29173\, m/s$

c. Mars $\simeq 84910\, km/h$ $\simeq 23586\, m/s$

d. Uranus $\simeq 24423\, km/h$ $\simeq 6784\, m/s$

69

a. 368 **b.** 111 111 **c.** – 224 **d.** – 70,5

70

a. 3^6 **d.** 2^{-1} **g.** 4^{-6} **j.** 15^{-4}

b. 4^{-2} **e.** 3^5 **h.** $(-1)^{-6}$ **k.** 32^3

c. $(-5)^{-7}$ **f.** 7^6 **i.** 14^5

71

a. 10^{36} **b.** 10^{-13} **c.** 10^9 **d.** 10^{-12} **e.** 10^{87}

72

a. 10^3 **b.** 10^{-15} **c.** 10^{18} **d.** 10^{15} **e.** 10^{43}

73

a. $7{,}283 \cdot 10^3$ **d.** $1{,}247 \cdot 10^1$

b. $2{,}5 \cdot 10^4$ **e.** $5{,}8 \cdot 10^{-3}$

c. $6{,}549\,8 \cdot 10^2$ **f.** $1{,}49 \cdot 10^{-4}$

g. $6{,}7 \cdot 10^1$ **i.** $9 \cdot 10^{-10}$

h. $1{,}59 \cdot 10^{-3}$

74

a. $1{,}2 \cdot 10^{11}$ Écriture scientifique

$= 120\,000\,000\,000$ Écriture décimale

b. $= 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-10}$

$= 10^{-6}$ Écriture scientifique

c. $= 12 \cdot 10^3$

$= 1{,}2 \cdot 10^4$ Écriture scientifique

d. $= 1{,}4 \cdot 10^4$ Écriture scientifique

$= 14\,000$ Écriture décimale

e. $= 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ Écriture scientifique

$= 0{,}003\,6$ Écriture décimale

f. $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Écriture scientifique

$= 0{,}000\,15$ Écriture décimale

75 $-\frac{24}{5}$

76

a. $26-2\sqrt{5}$ **b.** $5+2\sqrt{6}$

77

a. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **b.** $3-2\sqrt{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{15}+3}{2}$

1 *Système de numération*

Notre système de numération est dit « positionnel en base 10 ». Qu'est-ce que cela signifie ? Est-il possible de représenter les quantités avec d'autres systèmes ? Qu'en est-il historiquement ?

Voir le complément librement téléchargeable sur http://sesamath.ch/manuel-matugym-1e.

2 *Littérature*

« Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie. L'hypocrisie à mes yeux, c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs prêtres. Suivant moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques, et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï-dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que « moins par moins donne plus »? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle « algèbre »). On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa « leçon », celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage ; tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit, vous voulez apparemment vous singulariser. » Quand a M. Dupuy, il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de « moins par moins » à un « fort », il me riait au nez ; tous étaient comme Paul-Emile Teisseire et apprenaient par coeur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations : « Il est donc évident, etc » Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur. –. ×. – = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M.Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les « forts » auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que - par - donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats « vrais et indubitables » ».

Stendhal, « La vie d'Henry Brulard »

De 14 à 17 ans, Henri Beyle, dit Stendhal, étudia à L'École centrale de Grenoble, une des premières institutions où l'enseignement des mathématiques dispensé à de jeunes élèves était influencé par les cours de L'École Normale issue de la Révolution française. Dans « La vie d'Henry Brulard » (1835), ouvrage autobiographique, reflet d'une passion pour le dessin et les mathématiques et d'une adolescence où sa révolte contre son père et contre la société le conduit à se déclarer athée et jacobin, on constate que l'enseignement reçu ne parvint pas à satisfaire la curiosité du jeune Stendhal lorsqu'il voulut comprendre l'origine de la « règle des signes ». Le marquis de Condorcet, auteur d'un projet de réforme de l'instruction publique (1792) est convaincu du développement indéfini des sciences et affirme que le progrès intellectuel et moral de l'humanité peut être assuré grâce à une éducation bien orientée. Il écrit, peu avant sa mort tragique : « il m'a paru qu'en général on ne devrait rien enseigner aux enfants, sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs ». Si l'on peut apprécier l'éreintage de ses maîtres réussi par Stendhal, il faut savoir reconnaître à ceux-ci quelques circonstances atténuantes, puisées dans une histoire bimillénaire, celle des nombres négatifs.

« La première apparition de nombres négatifs remonterait aux débuts de la dynastie Han, deux siècles environ avant notre ère. Un des plus anciens textes mathématiques chinois connus, le Jiuzhang suanshu (L'art du calcul en neuf chapitres) distingue nombres positifs et négatifs par des bâtonnets de bambou ou d'ivoire, peints en rouge ou en noir, bâtonnets que les administrateurs des régions de l'empire transportaient dans leurs sacs comme instruments de calcul. L'ouvrage en question donne d'ailleurs, plus ou moins explicitement, les règles des signes pour les deux opérations fondamentales que sont l'addition et la multiplication. Mais pour les Chinois les nombres étaient toujours issus de situations concrètes : un nombre représentant toujours une certaine quantité de quelque chose. Les nombres négatifs ne se rencontraient donc que comme auxiliaires de calcul et n'étaient pas considérés comme des solutions possibles à un problème donné.

[Comme nous le verrons plus loin], dans les mathématiques grecques, les nombres restèrent toujours liés à une interprétation géométrique. De ce fait, des nombres négatifs ne furent pratiquement jamais envisagés, contrairement aux nombres irrationnels.

Les nombres négatifs réapparaissent bien plus tard en Inde. Dès le huitième siècle, les Hindous montrent une parfaite connaissance de ces nombres et de leur manipulation, essentiellement dans des problèmes commerciaux. Mais la justification d'une règle telle que « le négatif multiplié par le négatif est positif » reste absente.

En Occident, les nombres négatifs apparaissent relativement tard et il faudra attendre plusieurs siècles avant que les mathématiciens ne les acceptent en tant que nombres réels. Michael Stifel (1487-1567) connaissait parfaitement leurs propriétés et les introduisit en 1544 dans son Aritmetica Integra, mais il les appelait « numeri absurdi ». Jérôme Cardan (1501-1576) les acceptait comme solutions de certains problèmes, mais il les qualifiait de nombres fictifs. Albert Girard (1595-1632) fut le premier à en donner une interprétation géométrique : le signe - s'explique en géométrie en rétrogradant et les solutions par - reculent là ou les solutions par + avancent. Blaise Pascal (1623-1662) considérait pour sa part, la soustraction de quatre à zéro comme un pur non-sens : "j'en sais qui ne peuvent comprendre qui de zéro ôté quatre, reste zéro".

Au milieu du 18e siècle, les explications données dans l'Encyclopédie au sujet des nombres négatifs et de leur utilisation restent encore assez peu claires et l'on y explique que, si un nombre négatif se trouve être la solution d'un problème, c'est que ce problème est mal posé. Ainsi, des siècles durant, certains utilisèrent les nombres négatifs dans leurs calculs, souvent avec subtilité et adresse, tentant d'élaborer tant bien que mal des justifications concrètes, tandis que d'autres continuèrent à protester contre leur usage.Dès le 19e siècle, les nombres négatifs conquirent enfin un statut comparable à celui des nombres positifs. Mais la justification d'une règle, telle que la règle des signes chère à Stendhal, ne sera donnée qu'en 1867 par Hermann Hankel (1814- 1899), de façon formelle et définitive. »

Source : « Algèbre Mode d'emploi », Charrière, LEP

3 *Brahmagupta*

« Une dette moins zéro est une dette.

Un bien moins zéro est un bien.

Zéro (shûnya) moins zéro est nul (kham).

Une dette retranchée de zéro est un bien.

Alors qu'un bien retranché de zéro est une dette.

Le produit de zéro par une dette ou par un bien est zéro.

Le produit de zéro par lui-même est nul.

Le produit ou le quotient de deux biens est un bien.

Le produit ou le quotient de deux dettes est un bien.

Le produit ou le quotient d'une dette par un bien est une dette.

Le produit ou le quotient d'un bien par une dette est une dette. »

Source : Brahmagupta, Brâhmasphutasiddhânta, cité par Ifrah G., Histoire universelle des chiffres, T. 1, p. 976

4 *Hanc marginis exiguitas non caperet*

a. Existe-t-il des triangles rectangles dont toutes les mesures de côtés sont des entiers ?

b. Étant donnés deux côtés quelconques, est-il toujours possible de construire un triangle rectangle en ajoutant un 3e côté ?

c. Étant donnés deux côtés quelconques dont les mesures sont des entiers, est-il toujours possible de construire un triangle rectangle en ajoutant un troisième côté qui soit aussi de mesure entière ?

d. Un **triplet pythagoricien** est un triplet de nombres entiers dont la somme des carrés des deux premiers vaut le carré du troisième. Donner des exemples de tels triplets.

e. Existe-t-il une infinité de triplets pythagoriciens ? Justifier.

« L'histoire de la recherche de triplets pythagoriciens se confond en quelque sorte avec l'histoire des mathématiques.

Une tablette babylonienne datée entre 1900 et 1600 avant notre ère, la tablette 322 de la collection Plimpton de l'Université Columbia, New-York, contient une liste de 15 triplets qui sont les exemples les plus anciens connus :

Source : commons.wikimedia.org

5 Que penser de la dénomination "triplets pythagoriciens" ?

Si Pythagore, Platon ou Euclide, parmi d'autres mathématiciens grecs, donnent plusieurs siècles avant JC plusieurs règles pour les former, c'est avec Diophante d'Alexandrie (vers 250 ap. J.-C.) que leur étude prend un nouvel essor. Dans le 2e livre de son œuvre maîtresse, l'Arithmetica, il pose et résout de façon originale le problème suivant : diviser un carré en deux autres carrés. Algébriquement parlant, on l'aura deviné, ce problème demande de trouver trois nombres entiers a, b, c, tels que $a^2+b^2=c^2$ ce qui en soi n'est pas nouveau.

Mais, 14 siècles plus tard, entre en scène Pierre Simon de Fermat (1601-1665). Juriste et conseiller au Parlement de Toulouse, il consacre ses loisirs aux mathématiques. Ce qui ne l'empêche pas de faire d'importantes découvertes, qu'il publie d'ailleurs rarement. Selon l'usage de l'époque, il en donne souvent communication dans des lettres à ses amis. A sa mort, en 1665, il est un des mathématiciens les plus connus d'Europe.

Lorsque son fils se met en devoir de rassembler toutes les notes et les lettres de son père, il tombe sur un exemplaire de l'Arithmetica de Diophante, une traduction en latin datant de 1621, annoté de la main de son père. En marge du problème qui nous intéresse, on peut lire : « Décomposer un cube en deux autres cubes, une quatrième puissance, et généralement une puissance de même nom au-dessus de la seconde puissance, est une chose impossible, et j'en ai assurément trouvé l'admirable démonstration. La marge serait trop exigüe et ne la contiendrait pas. »

Ce qu'affirme Fermat, c'est que si n est un nombre entier supérieur à 2, il n'est pas possible de trouver trois entiers (non nuls) a, b, c, tels que $a^n+b^n=c^n$.

Comme on n'a retrouvé aucune trace de sa démonstration, cela est resté une conjecture, devenue la « conjecture de Fermat », une des plus fameuses de l'histoire de l'Arithmétique.

Un très grand nombre de preuves incorrectes a été publié, et les travaux qu'elle a suscités ont conduit au développement de domaines entièrement nouveaux des mathématiques. Les plus grands mathématiciens y ont contribué et des livres par centaines y sont consacrés. Bien que vérifiée dans de très nombreux cas (pour tous les exposants inférieurs à 150000, par exemple), elle est restée un problème ouvert pendant plus de trois cent cinquante ans !

Ce n'est qu'en juin 1993 que le mathématicien Andrew Wiles, professeur à l'Université de Princeton et spécialiste de la théorie des nombres, annonce que la conjecture de Fermat est démontrée. Six mois plus tard, il faut déchanter. La démonstration ne résiste pas aux vérifications de détail faites par quelques experts ; elle présente une lacune fâcheuse. Finalement, en octobre 1994, la communauté mathématique apprend qu'Andrew Wiles a triomphé des difficultés : la conjecture de Fermat est devenue un théorème !

Une référence pour aller plus loin :

« Le Dernier Théorème de Fermat », de *Simon Singh, Poche, 1999.*

6 Des fouilles archéologiques, entreprises à partir du milieu du XIXe siècle en Mésopotamie, ont livré plus de 500 000 tablettes d'argile marquées de signes cunéiforme.

Environ 300 d'entre elles concernent les mathématiques et relèvent, en majorité, de la période paléo-babylonienne, c'est-a-dire sont contemporaines de la dynastie d'Hammourapi, vers 1700 av.J.-C.

L'étude de ces documents permet d'apprécier les connaissances mathématiques des habitants du Croissant fertile. Nous avons déjà rencontré une telle tablette au point 4. !. Sur une autre petite tablette qui fait actuellement partie de la Yale Babylonian Collection sous la cote YBC 7289, on voit tracé un carré avec ses deux diagonales :

Source : http://commons.wikimedia.org

Sur le côté on peut traduire et trouver le nombre 30 et sur une diagonale les nombres 1, 24, 51,10 et 42, 25, 35.

a. Interpréter ces nombres en base 10.

On constate donc que les géomètres babyloniens - qui nous l'avons déjà vu étaient familiers avec le théorème de Pythagore plus de mille ans avant Pythagore- savaient évaluer la racine carrée de 2 avec une précision remarquable. En effet, l'approximation 1 ; 24,51,10 correspondant à 1,414212963 en notation décimale ; la précision est de l'ordre du millionième !

b. Vérifier ce calcul.

Ce problème du calcul de la diagonale du carré va être à l'origine de la première grande crise de l'histoire des mathématiques, à l'époque de Pythagore précisément. La mathématique grecque à ses débuts est inséparablement liée a des spéculations, parties scientifiques, parties philosophiques et mystiques, sur les proportions, les similitudes et les rapports, en particulier les “rapports simples” (exprimables par des fractions à petits numérateur et dénominateur) ; et ce fut l'une des tendances caractéristiques de l'école pythagoricienne de prétendre tout expliquer par le nombre entier et les rapports d'entiers. Mais ce fut l'école pythagoricienne justement, qui découvrit l'incommensurabilité du côté du carré avec sa diagonale. Ne supportant pas l'idée qu'il pouvait exister, dans l'Univers, certaines choses inexprimables par des nombres entiers ou des fractions, ils s'efforcèrent de tenir cette découverte secrète, mais cela ne fut pas possible longtemps. Un de leurs élèves, un certain Hippasos de Metaponte révéla publiquement l'existence de ce nouveau type de nombres, les irrationnels. Cette révélation fut l'une des causes de la fin de l'école pythagoricienne et, dit-on, de la mort mystérieuse, par noyade, d'Hippasos.

Plus tard, il fut démontré que tout nombre entier est soit un carré parfait, soit le carré d'un nombre irrationnel. Au XIXe siècle enfin, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), créateur de la célèbre théorie des ensembles, démontra qu'il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Ses étonnantes découvertes dans le domaine des ensembles infinis soulevèrent de grandes controverses.

Léopold Kronecker, son maître et l'un de ses adversaires les plus acharnés, le traita de corrupteur de la jeunesse, alors que David Hilbert, l'un de ses plus fidèles partisans, écrivait : « Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser ».

Source (adaptation jmd) : Charrière, "Algèbre mode d'emploi", LEP

7 Les Égyptiens, il y a quatre millénaires déjà, se posaient des questions mathématiques. Nos connaissances sur l'état des mathématiques à cette époque se fondent sur quelques rares manuscrits qui attestent d'un niveau relativement élevé aussi bien en mathématiques qu'en astronomie. N'oublions pas que l'Égypte utilisait un calendrier de 365 jours ! Cependant, de façon générale, les objectifs de la mathématique égyptienne sont essentiellement d'ordre pratique, liés au commerce, au fisc, au cadastre ou à l'art de la construction. Un des plus anciens documents qui nous soient parvenus date de 1650 avant J.-C. Il s'agit d'un texte écrit en hiératique (forme cursive des hiéroglyphes) sur papyrus. Il commence par cette introduction qui a permis de le dater : "Calcul exact. L'accès à la connaissance de toutes les choses existantes et de tous les secrets obscurs. Ce livre fut copié la 33 année, le 4e mois de la saison de l'inondation, sous la majesté du roi de Haute et Basse-Egypte, A-user-Ré (un des rois Hyksos), . . . c'est le scribe A'h-mosé qui copia cet écrit". Ce document, retrouvé dans les ruines du Rameseion à Thèbes, fut acheté en 1858 par A. Henry Rhind, un antiquaire écossais. Déchiffré vers 1890, il est actuellement conservé au British Museum de Londres. Le papyrus de Rhind expose la solution de problèmes, énoncés de manière fort concise, portant sur divers sujets d'arithmétique et de géométrie : opérations utilisant les fractions, partages, calculs des aires de formes géométriques simples (dont le cercle) et des volumes de récipients, mensurations de pyramides. Par exemple, le problème n°24 :"Inconnue, son septième, le tout est 19 ". Autrement dit : "La somme d'un nombre et de son septième est 19, quel est ce nombre ? " La réponse donnée, suivie d'une vérification, est $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. La manière qu'avaient les Égyptiens d'utiliser les fractions est très particulière, à la fois primitive et sophistiquée. En effet, à l'exception de 23 et, plus rarement, 34, pour lesquels ils disposaient de hiéroglyphes spéciaux, ils calculaient par quantièmes, c'est-à-dire que seules les fractions ayant un numérateur égal à 1 leur étaient d'usage facile, avec un symbolisme adéquat pour les représenter. Il s'ensuit que l'un des premiers problèmes rencontrés était de représenter toute quantité fractionnaire en une somme de fractions unitaires. Pour ce faire, les scribes se référaient à des tables et notamment des tables qui donnent, pour chaque fraction de la forme $\frac{2}{n}$ sa représentation en somme de fractions unitaires différentes.

Le papyrus de Rhind contient une telle table de division de 2 par tous les nombres impairs compris entre 5 et 101 : $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; … ; $\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$;… ; $\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$;… Il est très vraisemblable que beaucoup de ces résultats ont été obtenus par tâtonnements.

Il est intéressant de remarquer que, contrairement aux Égyptiens, les Babyloniens, avant eux, et les Romains longtemps après, adoptèrent des expressions fractionnaires à dénominateur constant ; 60 pour les premiers, 12 pour les seconds. Chez les Babyloniens, les multiples et les sous-multiples de l'unité se succèdent, en notation positionnelle, suivant le système sexagésimal, comme nous pour notre système décimal. La division du degré en 60 parties égales date de cette époque (3000 ans avant J.-C.). Chez les Romains, le dénominateur étant 12, chaque quantité fractionnaire est convertie approximativement en douzièmes.

Source : Algèbre mode d'emploi, Charrière, LEP

« Il y a quelques années, après une conférence, quelqu'un me dit : "Vous semblez toujours lier mathématiques et amusement...". Je fus inspiré de lui répondre : "Si ce n'était pas amusant, pourquoi en ferions-nous ?" »

Ralph P. BOAS, mathématicien américain (1912-1992)

A savoir en fin de chapitre

Calculer

- ✔ les nombres entiers naturels et relatifs : opposé d'un entier ;
- ✔ différence entre chiffre et nombre ; ordre des opérations ;
- ✔ le vocabulaire lié aux opérations (somme. différence, produit), différencier une opération de son résultat ;
- ✔ gérer des calculs complexes (parenthèses imbriquées et ordre des opérations) ;
- ✔ déterminer ppcm, pgcd, effectuer une division euclidienne avec quotient et reste ;

Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 12

Fractions, proportions

- ✔ fractions, numérateur, dénominateur, amplifier, simplifier, fractions irréductibles, fraction inverse ;
- ✔ maîtriser les opérations sur les fractions ;
- ✔ réduire en fraction irréductible, à la main et avec calculatrice ;
- ✔ proportionnalité ; résoudre des problèmes de proportions ;

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 13 à 18

Nombres rationnels

- ✔ nombre décimal, période, nombre rationnel ;
- ✔ convertir un nombre rationnel : fraction vers nombre décimal et vice-versa ;

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 19 à 22

Puissances

- ✔ puissances entière positive, nulle et négative ; calculs à la main et avec calculatrice ;
- ✔ manipuler des puissances de 10 ; écriture scientifique ;
- ✔ interpréter une pyramide de puissances ;

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 23 à 37

Irrationnels, réels, racines carrées

✔ racines carrées ; extraire les facteurs carrés, simplifier des expressions, rendre rationnel le "dénominateur" ;

✔ nombres irrationnels, nombres réels ;

✔ démontrer que racine de 2 est irrationnel ;

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 38 à 44

Calculatrice

✔ utiliser efficacement la calculatrice ;

✔ les résultats fournis par la calculatrice ne sont pas forcément exacts ;

✔ différence entre un résultat exact (=) et un résultat approché (≅) ;

Voir les exercices 45 à 48

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch01