Complément ch 7 - Histoire de l'algèbre

Source: Martin Cuénod et Yves Drevous (DIP-GE)

al-Khwãrizmi (mort en 907 ap. J.-C.)

Viète François (1540-1603)

Activité 1 A propos de l’origine des mots algèbre et algorithme

Entre les années 813 et 830 ap. J.-C. paraît, à Bagdad, un texte qui allait caractériser une branche des mathématiques. Ce texte avait pour titre « Kitab al-jabr wa al-muqãbala » dont l’auteur, Al-Khwãrizmi (mort en 907 ap. J.-C.), travaillait à la *Maison de la sagesse* de Bagdad, comme mathématicien et astronome.

Dans son introduction l’auteur précise les objectifs de son ouvrage:

Al-Khwãrizmi, (IX^{ème} siècle)

J’ai rédigé, dans le domaine du calcul par le jabr, un abrégé englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu’ils ont entre eux, relatives à l’arpentage, à la répartition des eaux des rivières, à l’architecture ainsi qu’à d’autres aspects. (…)

J’ai découvert aussi que les nombres dont on a besoin dans le calcul par la restauration et la comparaison sont de trois types : ce sont les racines, les carrés et le nombre seul, non rapporté à une racine ni à un carré. Parmi eux, la racine est toute chose, le carré est tout ce qui résulte de la racine multipliée par elle-même. Le nombre seul est tout ce qui est exprimé comme nombre sans rapport à une racine ni à un carré.

Al-Khwãrizmi, *Kitãb al-jabr wa al-muqãbala*, in : Djebbar A.
Une histoire de la science arabe, Seuil, Paris, 2001, p. 223

Prérequis et activités de découverte

Le titre de l'ouvrage d' al-Khwãrizmi est tout à la fois une discipline et deux opérations. Il s'agit en fait d'un programme. Une des traductions proposées est : Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison [1]. Le terme al-jabr signifie remplissage, rééquilibrage, restauration et vise à transformer, à restaurer, l'équation donnée afin de l'exprimer avec des nombres positifs exclusivement. Ce terme a donné le mot Algebrista, qui en espagnol a gardé son sens originel de « rebouteux », celui qui réduit, restaure, une fracture. Le terme al-muqãbala signifie, quant à lui comparaison et désigne le regroupement, dans une équation, des expressions semblables.

Ainsi un problème qui s'écrirait algébriquement : $3x^2-2x+5=2x^2+4$ se résoudrait en effectuant d'abord l'opération al-jabr qui consiste à additionner de part et d'autre de l'expression 2x. L'équation est alors « restaurée » elle devient : $3x^2+5=2x^2+2x+4$. Suit alors l'opération al-muqãbala qui consiste en la réduction des termes semblables et l'équation initiale s'écrit alors : $x^2+1=2x$.

Activité 2 Sur la naissance du zéro et des nombres négatifs

Dans son ouvrage *Brâhmasphutasiddhânta*, le mathématicien indien Brahmagupta (598-665) définira le zéro (*shûnya*) comme la soustraction d'un nombre *a* par lui-même. L'intégration du zéro dans le domaine des nombres nécessitera une extension des règles algébriques traitant non seulement du zéro mais également et surtout des nombres négatifs à l'instar de ce qui s'effectuera plus tard, au XVIe siècle, avec les nombres complexes.

Brahmagupta (628)

Lorsque le zéro est ajouté à un nombre ou soustrait d'un nombre, celui-ci demeure inchangé ; et le nombre multiplié par zéro devient zéro. (…)

Une dette moins zéro est une dette.

Un bien moins zéro est un bien.

Zéro (shûnya) moins zéro est nul (kham).

Une dette retranchée de zéro est un bien.,

Alors qu'un bien retranché de zéro est une dette.

Le produit de zéro par une dette ou par un bien est zéro.

Le produit de zéro par lui-même est nul.

Le produit ou le quotient de deux biens est un bien.

Le produit ou le quotient de deux dettes est un bien.

Le produit ou le quotient d'une dette par un bien est une dette.

Le produit ou le quotient d'un bien par une dette est une dette.

Brâhmasphutasiddhânta, in : *Histoire universelle des chiffres*, T.1, p. 977

1 Djebbar A., Une histoire de la science arabe, Seuil, Paris, 2001, p. 223.

Activité 3 A propos des « identités remarquables »

Une tradition grecque fait remonter l'origine de la géométrie à une pratique égyptienne comme en témoigne le géographe romain Strabon. Ce dernier indique, de plus, que si l'origine de la géométrie relève d'exigences d'arpentage sur les rives du Nil, celle de l'arithmétique, en Mésopotamie, est liée à des nécessités économiques.

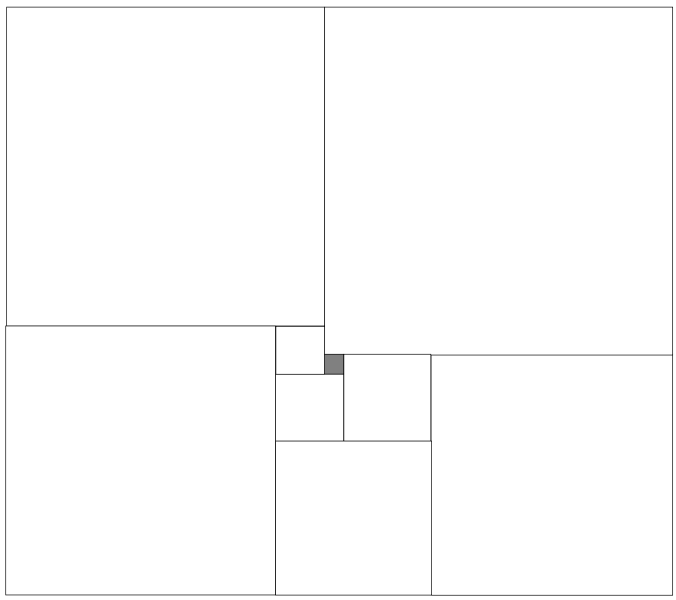
Strabon (environ 64 av.-21/25 ap. J.-C.)

Ce précis et minutieux découpage avait été rendu nécessaire par la perpétuelle confusion des bornages créée par le Nil au moment de ses crues, car le Nil retranche et ajoute, changeant la configuration des propriétés et le plus souvent faisant disparaître les marques qui permettent de distinguer sa propre terre de celle d'autrui, de sorte qu'il fallait refaire les mesures encore et toujours. On affirme même que ce fut là l'origine de la géométrie, tout comme l'arithmétique serait née chez les Phéniciens des échanges commerciaux.

Le Voyage en Egypte, un regard romain, p. 69

Certains historiens des sciences ont indiqué que cette pratique avait notamment débouché sur des identités remarquables dans la mesure où elles se prêtaient particulièrement bien à des illustrations (usages ?) géométriques et figurés. On retrouve une partie de cette « algèbre géométrique » dans l'œuvre du mathématicien Euclide (IIIe siècle av. J.-C.) dont nous étudierons plusieurs propositions de son ouvrage, les Eléments, dans le chapitre consacré à la géométrie.

Exercice: le rectangle ci-dessous est pavé de neuf carrés. Sachant que le plus carré mesure 2 de côté, calculer les dimensions du rectangle ainsi que celles des autres carrés.



Activité 4 A propos de l'équation du 1er degré

On trouve dans les papyrii actuellement connus plusieurs problèmes qui débouchent sur la résolution d'équation du premier degré. En voici un exemple.

Papyrus de Moscou[2] (env. 1800 av. J.-C.)

19. Exemple de calcul d'une quantité qui traitée 3/2 fois et ajoutée à 4 est devenue 10.
Quelle est donc la quantité qui s'exprime ainsi ?
Tu dois faire en sorte de calculer la grandeur de 10 envers ce 4, ce qui donne 6.
Ensuite, tu dois faire en sorte de calculer pour trouver 1, ce qui donne 2/3.
Tu dois faire en sorte de calculer les 2/3 de 6, ce qui donne 4.
Vois, c'est 4 qui s'exprime ainsi, ce que tu trouves parfaitement.

(in : Couchoud S., *Mathématiques égyptiennes*, p. 98)

Interprétation: le problème se ramène à la résolution de l'équation $\frac{3}{2}x+4=10$

La démarche proposée se conduit en 3 étapes :

$10-4:6$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}\cdot 6=4$

On trouve dans le papyrus de Rhind[3] un autre exemple de problème du 1er degré dont la résolution permet de se familiariser avec l'usage des quantièmes[4].

Papyrus de Rhind (env. 1800 av. J.-C.)

24. Une quantité à qui on ajoute son 1/7 de sorte qu'elle devient 19.

1	7
1/7	1
1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1
19/8	2 1/4 1/8
1	2 1/4 1/8
2	4 1/2 ¼
4	9 1/2
7	16 1/2 ¼

Calculer selon le fait que la quantité inconnue devient 16 1/2 1/8. 1/7 est 2 1/4 1/8 et le total 19.

---

2 Papyrus actuellement au Musée des Beaux-Arts à Moscou, acheté à Thèbes en 1893 par W. Golenischeff à un membre de la famille Abd el Rassoul. Trouvé dans une nécropole il mesurait à l'origine 544 cm de longueur. Il contient 25 exemples variés qui traitent de problèmes du 1er degré, des questions de géométrie voire des situations qui débouchent sur des progressions numériques et des partages.

3 Célèbre papyrus de la seconde période intermédiaire, le Papyrus Rhind aurait été écrit par le scribe Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes. Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens. Il fut écrit en écriture hiératique. Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind, le 14 décembre 2007.

4 Les quantièmes sont les fractions pour lesquelles le numérateur est égal à 1.

(in : Couchoud S., *Mathématiques égyptiennes*, pp. 113-114)

Transcrire l'énoncé précédent dans un langage formalisé et décrire les étapes suivies par le scribe pour résoudre cette équation.

Le papyrus de Rhind
Source : http://www.egypte-antique.info/images/papyrus-mathematique-rhind1.jpg, le 14 décembre 2008

Solution

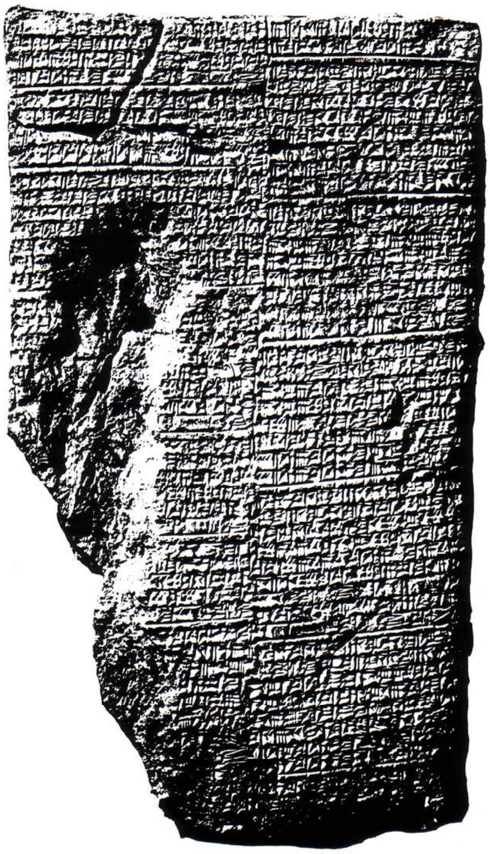
Ce problème a pour équation : $x+\frac{x}{7}=19$ et a pour solution x = $\frac{133}{8}$:

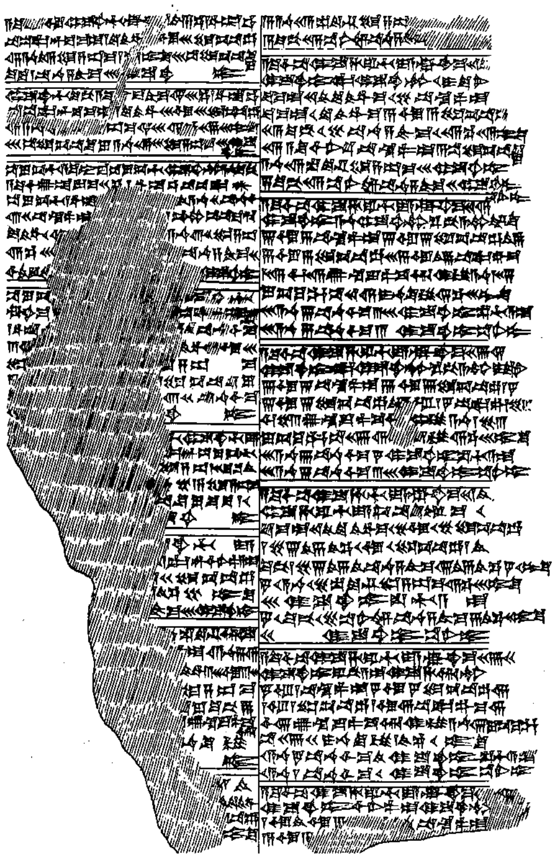
	1		7
	1/7		1
	$1\cdot n$	=	8
	2$\cdot n$	=	**16**
	$1/2\cdot n$	=	4
	1/4$\cdot n$	=	**2**
	1/8$\cdot n$	=	**1**
y =	$19/8\cdot n$	=	2 1/4 1/8
	$1\cdot y$	=	2 1/4 1/8
	$2\cdot y$	=	4 1/2 1/4
	$4\cdot y$	=	9 1/2

$$7\cdot y=\frac{7\cdot x}{7}x+\frac{x}{7}=19 \quad = \quad 16\ 1/2\ 1/8$$

Activité 5 L'algèbre mésopotamienne

On trouve dans une tablette mésopotamienne répertoriée BM 13901, conservée au British Museum et, datant de la période d'Hammurapi (1792-1750 av. J.-C.), une importante collection de 24 problèmes faisant intervenir des équations du second degré. C'est l'un des plus anciens textes babyloniens connus présentant un caractère mathématique. Il a été transcrit et traduit en français en 1936 par F. Thureau-Dangin qui en a fait un commentaire exhaustif [5]. La traduction qu'il propose de cette tablette nous servira de référence. Voici un des problèmes de cette tablette accompagné de sa solution:





Tablette BM 13901 (environ 1800 av. J.-C.) et sa transcription

5 Thureau-Dangin F., L'équation du second degré dans la mathématique babylonienne d'après une tablette inédite du British Museum, Revue d'Assyriologie, T. 33, 1936.

Tablette BM 13901 (environ 1800 av. J.-C.)

eqlam![am] *ù mi-it-ḫar-ti ak-m*[*ur-m*]*a 45* - e *1 wa-ṣi-tam*
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [*30*] *ù 30 tu-uš-ta-kal*
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1 - e *1 imtaḫar 30 ša tu-uš-ta-ki-lu*
lìb-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

J’ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45’.

Tu poseras 1, l’unité.

Tu fractionneras en deux 1 : 30’.

Tu croiseras 30’ et 30’ : 15’.

Tu ajouteras 15’ à 45’ : 1.

C’est le carré de 1.

Tu soustrairas 30’, que tu as croisé, de 1 : 30’, le côté du carré.

in : Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens*, Publications de la société orientale *ex oriente lux* : vol. 1, E.J. Brill, Leiden, p. 1, 1938

Le texte, après avoir énoncé le problème qui, dans un langage formalisé s’énonce : $x^2 + x = 0;45$, décrit la solution positive du problème par différentes étapes.

1. Partir du nombre 1, coefficient du terme x.

2. Partager ce coefficient en deux parties égales : 0;30 (le système numérique utilisé est en base 60, on parle alors de système sexagésimal)

3. Effectuer le produit de 0;30 par 0;30 (« tu croiseras 0;30 et 0;30 ») : 0;15.

4. Ajouter cette quantité à la valeur numérique donnée : 0;15 + 0;45 = 1

5. « C’est le carré de 1 » se transcrit par : $\sqrt{0;15 + 0;45} = 1$.

6. Soustraire de ce résultat la moitié du coefficient du terme en x : $\sqrt{0;15 + 0;45} - 0;30$.

   C’est la solution recherchée : $x = \sqrt{0;15 + 0;45} - 0;30$.

Le texte décrit les différentes étapes permettant de calculer la solution sans justification. C’est du reste une caractéristique des documents qui sont actuellement en notre possession. Aucun d’entre eux ne fournit de renseignements sur la manière et les méthodes qui ont permis ces découvertes. On peut néanmoins proposer deux démarches, l’une algébrique l’autre géométrique, qui pourraient expliquer la solution proposée dans le texte ci-dessus.

Interprétation algébrique avec tableau

Il s'agit, à l'instar de ce que nous faisons lorsque nous justifions la formule générale de la résolution de l'équation générale du second degré, de recréer, dans le membre de gauche de l'égalité, un carré, puis d'extraire de part et d'autre la racine positive et finalement de soustraire de part et d'autre la moitié du coefficient du terme en x. Cela donne, formellement :

1. Une première étape préparatoire consiste à calculer le carré de la moitié du coefficient du terme en x : .

2. Cela étant fait, on additionne aux deux membres de l'égalité le nombre ainsi calculé : x2 + 1·x + 15' = 45' + 15' = 1.

3. Le membre de droite est un carré parfait ; on a donc (x + 30') 2 = 1 .

4. Cette équation est considérée comme équivalente à : .

   On constate que seule la solution positive est envisagée.

5. La solution est obtenue en soustrayant aux deux membres de l'équation la valeur 30' : x = 1 – 30' = 30'.

Les différentes étapes du calcul sont présentées dans le tableau ci-dessous.

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré **: 45'** .	$x^2 + x$
Tu poseras 1 , l'unité.	$x \cdot x + 1 \cdot x$
Tu fractionneras en deux 1 **: 30'**	
Tu croiseras 30' et 30' **: 15' .**	
Tu ajouteras 15' à 45' **: 1 .**	
C'est le carré de 1 .	$= 1^2$
(*)	$= 1$
Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 **: 30'**	
Le côté du carré.	x

Interprétations géométriques avec figures

Première visualisation :

L'équation peut se figurer à l'aide du rectangle en gras.

Par une équivalence des aires, on détermine la valeur de x .

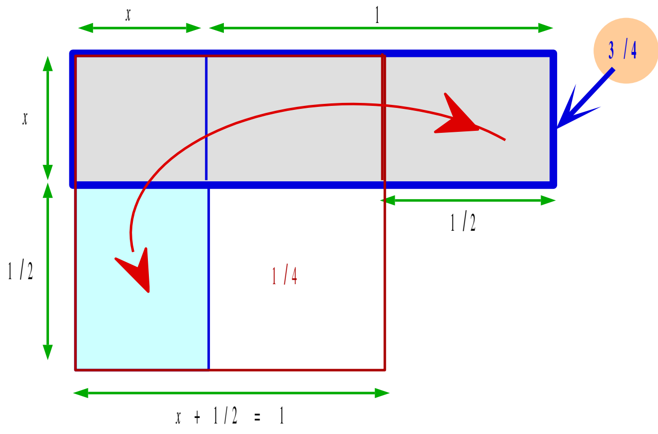


fig.(1)

Deuxième visualisation :

Le problème revient à identifier les dimensions du rectangle R1 de sorte que son aire vaille celle du rectangle R2, à savoir $x \cdot x + 1 \cdot x = 1 \cdot$.

On translate verticalement R1 de sorte que les aires A et B puissent être considérées comme égales, cf. fig.(3) .

La fig.(4) montre que est solution.

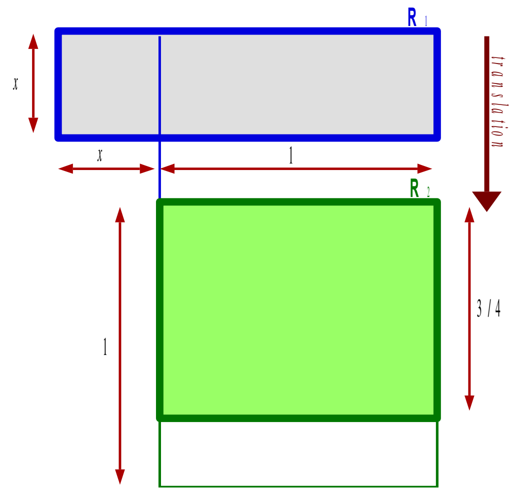


fig.(2)

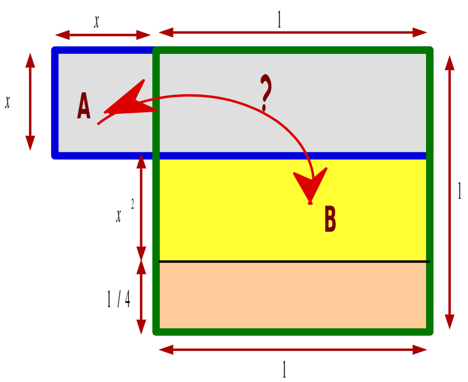


fig.(3)

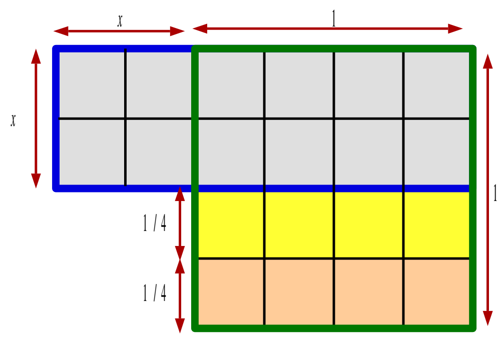


fig.(4)

Activité 6 Diophante d'Alexandrie

On trouve, quelques siècles plus tard le même problème chez Diophante (3e - 4e siècle ap. J.-C.). Le traitement fait apparaître une méthode nouvelle de résolution qui utilise une inconnue accessoire, l'arithme.

Diophante, III-IV^{e} siècle.

I. 27

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ; chose qui est d'ailleurs figurative.<voir ex.10>

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des deux nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand sera 12 unités, le plus petit 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

in : *Les six livres arithmétiques*, trad. Ver Eecke P., pp. 36-38

Exercice: expliquer et transcrire le texte suivant et dégager la méthode suivie par Diophante.

Solution

Diophante I.27

On donne : $\begin{cases} a+b=p \\ a\cdot b=s \end{cases}$

où p et s sont supposé connus.

On pose : $a-b=2\cdot\delta$ *" = 2 arithmes "*

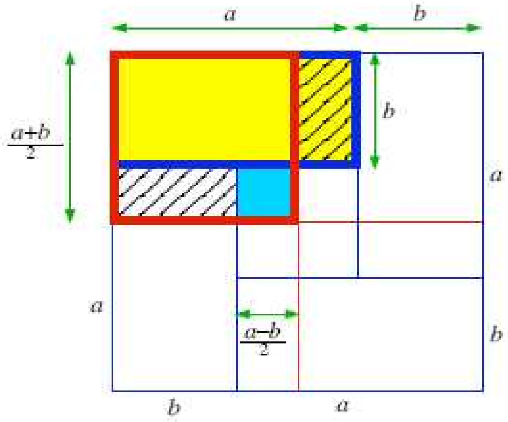
$\Leftrightarrow \quad a-\delta=b+\delta \quad$ si $a>b$.

$$\begin{cases} a = \dfrac{a+b}{2}+\delta \\ b = \dfrac{a+b}{2}-\delta \end{cases}$$

On en déduit :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\delta^2=s \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2-\delta^2=s$$

$$\Rightarrow \quad \delta=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-s}\ .$$



Plutôt que, cf. Diophante I.27

$$a\cdot b+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

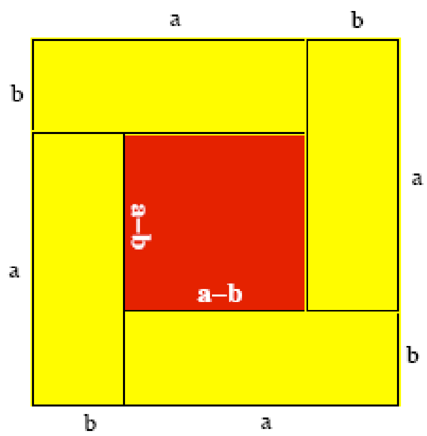
on peut préférer :

$$(a+b)^2=4\cdot a\cdot b+(a-b)^2$$

qui trouve une élégante démonstration géométrique, ce qui est l'intitulé du paragraphe en question.

L'avantage de la première expression réside en ce qu'il est aisé de déduire l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques :

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}\ .$$



Activité 7 Al-Khwãrizmi

Nous avons vu que c'est les mots algèbre et algorithme était d'origine arabe. C'est en effet à Al-Khwãrizmi que l'on doit un traité où apparaît, pour la première fois, le terme al-jabr. Dans ce traité Al-Khwãrizmi recense, notamment, 6 types d'équation du1er ou du 2e degré auxquels peuvent se rapporter toutes les équations étudiées par le passé que ce soit du temps des Babyloniens, des Grecs, des Séleucides ou de Diophante, à savoir :

1. « Des carrés qui égalent des racines »
2. « Des carrés qui égalent un nombre »
3. « Des racines qui égalent un nombre »
4. « Des carrés et des racines qui égalent un nombre »
5. « Des racines et un nombre qui égalent des carrés »
6. « Des carrés et un nombre qui égalent des racines »

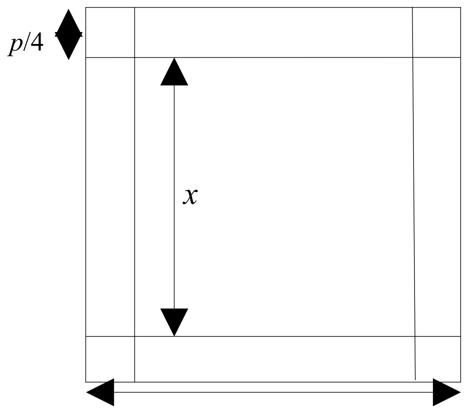
Exercice: le texte ci-dessous décrit la démarche adoptée par Al-Khwãrizmi pour résoudre un type d'équation du 2e degré. Expliquez et transcrivez ce texte.

Al-Khwãrizmi, (IX$^{\text{ème}}$ siècle)

Une puissance [6] et des racines égales à un nombre, c'est comme si l'on disait : une puissance et dix racines sont égales à trente-neuf drachmes, dont voici la signification, la puissance à laquelle on ajoute dix fois la racine, donne un total qui est trente neuf. La règle de ce cas est de prendre la moitié des racines, soit cinq. Multipliées en elles-mêmes elles donnent vingt-cinq : en y ajoutant trente-neuf on obtient soixante-quatre. Prenons-en la racine qui est huit. Ensuite enlevons à ce résultat cinq. Il reste trois qui est la racine de la puissance. Et la puissance est neuf.

al-Khwãrizmi, *Kitãb al-jabr wa al-muqãbala*, in : Dedron P./ Itard J. *Mathématiques et mathématiciens*, Ed. Magnard, Paris, 1959, pp. 324-25

Le texte original est accompagné d'une illustration géométrique permettant de suivre la démarche adoptée. Montrez en quoi la figure ci-contre permet d'illustrer cette démarche.



6 Il faut comprendre ici « carré ».

Activité 8 François Viète

Banni du Parlement de Rennes en 1584, Viète (1540-1603) est rappelé par Henri III en 1589 comme conseiller au Parlement de Tour, puis par Henri IV qui l'emploiera comme conseiller privé. Son œuvre mathématique L'Art analytique date de cette courte période de mise à l'écart politique et le place parmi les plus grands mathématiciens de son temps. C'est à lui que l'on doit l'introduction du calcul littéral, dans In artem analyticam isagoge.

Itard (1958).

La découverte récente des travaux de Diophante fut, en algèbre, le catalyseur des idées de Viète. Celui-ci mit en évidence l'isomorphisme fondamental entre le domaine de l'algèbre numérique de Diophante, de Cardan, de Tartaglia, de Bombelli, de Stifel, et celui de l'analyse géométrique qui se devine sous-jacente aux exposés synthétiques d'Euclide, d'Archimède, surtout d'Appolonius, et dont les écrits de Pappus, retrouvés sur ces entrefaites (1ère éd., 1588), donnent une idée plus précise. Pour traduire cet isomorphisme il invente sa « logistique spécieuse » ou art du calcul sur des symboles, ou espèces, représentant les grandeurs, tant géométriques qu'arithmétiques.

Il subdivise l'analyse en trois parties fondamentales. La zététique, ou art de chercher les problèmes, consiste à adopter un symbolisme permettant de noter tant les grandeurs inconnues que les connues, à exprimer les liens qui les unissent, et à en dégager l'équation qui, sous forme abstraite, résume le problème posé. L'analyse poristique apparaît alors qui étudie, transforme, discute cette équation. Enfin l'exégétique ou analyse réthique, revenant au problème concret, résout l'équation, soit par des constructions s'il s'agit de géométrie, soit par des calculs numériques s'il s'agit d'arithmétique.

On reconnaît dans ces principes les méthodes mêmes des mathématiques modernes que Viète fonde ainsi par une œuvre peut-être trop abrupte et hermétique pour la plupart de ses contemporains, mais qui va féconder tout un courant de la première moitié du XVIIème siècle.

Il note toutes les grandeurs qui entrent dans un problème au moyen des lettres majuscules latines. Les voyelles désignent les inconnues, les consonnes les données. La dimension de chaque grandeur est systématiquement indiquée.

Par exemple, l'équation que nous écrivons : $x^3-3bx^2+(3b^2+d)x=c+db+b^3$, est écrite par Viète :

$$\left.\begin{array}{l} \text{E cubus} \\ -\text{B in E quadrato ter} \\ \left.\begin{array}{l}+\text{B quadrato ter}\\ +\text{D plano}\end{array}\right\} \text{in E} \end{array}\right\} \text{aequabitur} \left\{\begin{array}{l} \text{Z solido} \\ +\text{D plano in B} \\ +\text{B cubo}\end{array}\right.$$

Parmi ses écrits, ceux qui exerceront la plus grande influence sont : les Zeteticorum libri quinque (1593 ; trad. française, 1630) où sont repris les problèmes de Diophante dans la notation de la logistique spécieuse, De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione (1600), où apparaît la première méthode systématique de résolution numérique des équations, De aequationum recognitione et emendatione (1615), ouvrage fondamental pour la théorie des équations algébriques ; enfin In artem analyticam isagoge (1591 ; deux traductions françaises en 1630), petit traité où l'ensemble de l'analyse de Viète est défini et exposé.

Lorsque, en 1646, van Schooten donnera la seule édition presque complète de ses œuvres, l'influence du grand mathématicien aura depuis longtemps porté l'essentiel de ses fruits et ne présentera plus guère qu'un intérêt historique.

Itard J., in : Taton R., *La science moderne*, Quadrige, PUF, Paris, 1995, pp. 220-221

La méthode de résolution générale des équations du 2e degré

La leçon de Pierre Simon Laplace à l'Ecole Normale de l'an III

L'Ecole normale de l'an III naquit de la volonté d'appliquer l'éducation des futurs instituteurs la « méthode révolutionnaire », adoptée par le Comité de salut public en pluviôse an II (février 1794) afin de former des techniciens sachant raffiner du salpêtre, fondre et forer les canons, et capables de répandre à leur tour ces méthodes : « Le nouveau régime a tout accéléré », commentait Barère devant la Convention. Le 1er juillet 1794, il précisait : « Ce mode révolutionnaire de cours publics est devenu pour le Comité un type d'instruction qui lui servira utilement pour toutes les branches des connaissances utiles à la République : et vous ne tarderez pas à en sentir le besoin au milieu d'une ligue vandale ou wisigothe qui veut encore proclamer l'ignorance, proscrire les hommes instruits, bannir le génie et paralyser la pensée ». Si l'Ecole des armes fut un succès, pouvait-on de la même façon, et en quelques mois seulement, apprendre le maniement des idées et des méthodes à des hommes recrutés selon un principe géographique égalitaire ?

Telle était d'abord l'ambition des écoles normales. En septembre 1794, on pensait surtout à la rédaction, par des savants reconnus, de manuels élémentaires, toutes disciplines confondues ; ces savants pourraient alors les expliquer aux futurs enseignants. »

Dhombres J.,*Introduction générale*, in :
Leçons de Mathématiques à l'Ecole Normale de l'an III, Dunod, Paris, 1992, p. 1

Exercice: lire attentivement le texte qui suit et dégager la méthode générale décrite pour résoudre les équations du 2e degré.

Laplace (1795)

Quatrième leçon

1er ventôse / 19 février <1795>

« Après avoir exposé, dans la précédente leçon, les éléments du langage algébrique, je reviens à la théorie des équations. J'ai indiqué la méthode de résoudre les équations du premier degré, méthode que l'on est parvenu à simplifier en déterminant directement la valeur de chaque inconnue au moyen des quantités connues de ces équations. La considération des carrés des nombres a conduit aux équations du second degré. On appelle ainsi les équations dans lesquelles l'inconnue est élevée à sa seconde puissance.

Supposons que l'on se propose de trouver un nombre tel que si de trois fois ce nombre, on retranche son carré, le reste soit égal à 2. En nommant *x* ce nombre, $3x$ en sera le triple, et son carré sera x^2 ; leur différence sera donc $3x - x^2$; ainsi l'on aura l'équation $3x - x^2 = 2$.

C'est la traduction algébrique de la question proposée ; il s'agit d'en tirer la valeur de l'inconnue.

Pour cela, on commence par rendre le carré de l'inconnue positif, ce que l'on fait en multipliant tous les termes de l'équation par -1, et alors on a $x^2 - 3x = -2$.

Si par l'addition d'un terme connu à chaque membre de l'équation, on parvenait à rendre le premier membre un carré parfait, il est clair qu'en extrayant la racine carrée de chaque membre, l'équation s'abaisserait au premier degré ; on sait que le carré d'un binôme est égal au carré du premier terme, plus au double du produit du premier terme par le second, plus au carré du second ; en considérant donc *x* comme le premier terme du binôme et -3*x* comme étant égal au produit de *x* par le double du second, -3/2 sera ce second terme ; il suffit donc d'ajouter son carré ou 9/4 au premier membre de l'équation précédente, pour le rendre carré parfait. Cette équation devient ainsi $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 2$.

En extrayant la racine carrée de chaque membre, on a $x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$.

Mais on doit faire ici une observation importante. La racine carrée d'un nombre peut être également affectée du signe +, ou du signe $-$; car le carré de –*a* est le même que celui de +*a*. Ainsi en extrayant la racine carrée de chaque membre de l'équation précédente, le signe radical pet être indifféremment affecté de l'un ou de l'autre de ces signes, et rien n'indique lequel doit être employé. Pour exprimer cette double signification du radical, on le fait précéder du double signe $\pm$. On a ainsi $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 2}$; d'où l'on tire $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$.

On a donc pour *x* les deux valeurs $x = 2$, et $x = 1$, suivant que l'on prend le signe + ou le signe -, et il est visible que chacune de ces valeurs satisfait également à la question proposée. Ces valeurs ont été nommées *racines* de l'équation.

Vous voyez par là que les équations du second degré ont un caractère très distinct de celles du premier degré, dans lesquelles l'inconnue n'est susceptible que d'une seule valeur, et vous pouvez déjà en conclure que, dans les équations du troisième degré et des degrés supérieurs où l'inconnue est élevée à la troisième puissance et à des puissances plus élevées, l'inconnue a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa plus haute puissance.

Si dans la question proposée, la différence $3x - x^2$, au lieu d'être égal à 2, était supposée égale à 3, on aurait $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 3}$ ou $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$.

La quantité $\sqrt{-3}$ est impossible ; car un nombre réel positif ou négatif ne peut avoir pour carré un nombre négatif ; le problème qui conduit à ces valeurs est donc impossible. Ces valeurs se nomment *imaginaires* ; on peut les mettre sous la forme d'une quantité réelle, augmentée ou diminuée d'une autre quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$; ainsi les deux valeurs précédentes de *x*, peuvent être mises sous cette forme : $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{-1}$; et l'on voit qu'à cause du double signe $\pm$ dont le radical $\sqrt{-1}$ doit être affecté, la racine imaginaire est double, en sorte que les racines d'une équation du second degré sont, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

Quoique les quantités imaginaires soient impossibles, cependant leur considération est du plus grand usage dans l'analyse. Souvent, les grandeurs réelles se présentent sous la forme de plusieurs imaginaires dans lesquelles tout ce qu'il y a d'imaginaire se détruit mutuellement, quoiqu'il soit difficile de le reconnaître à l'inspection des formules. On verra bientôt que l'expression des racines des équations du troisième degré est dans ce cas, lorsque toutes les racines sont réelles. D'ailleurs, la comparaison des grandeurs réelles entre elles, et les imaginaires avec les imaginaires est un moyen fécond de l'analyse, pour déterminer les grandeurs.

Proposons-nous encore le problème suivant : *Deux lumières dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds, déterminer sur la droite qui les joint le point qu'elles éclairent également*.

Si l'on nomme *x* la distance de la plus faible lumière à ce point, cette distance étant supposée dirigée vers la plus forte lumière, 3-*x* sera la distance de la plus forte lumière au même point ; or, on sait que la force de la lumière décroît en raison du carré de la distance, en sorte que [illegible] sera la force de la plus petite lumière, à la distance *x*, et $\frac{4}{(3-x)^2}$ sera la force de la plus grande, à la distance 3-*x* ; ainsi, ces forces devant être égales par la condition du problème, on a $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$, ce qui donne après les réductions convenables, $x^2 + 2x = 3$; d'où l'on tire $x = -1 \pm 2$.

Les deux valeurs sont donc $x = 1$ et $x = -3$. La première apprend que le point également éclairé par les deux lumières et placé entre elles est à un pied de distance de la plus faible. La seconde valeur est négative ; elle montre ce que l'on pouvait ignorer d'abord, savoir qu'il existe un second point également éclairé par les lumières et placé à trois pieds de distance de la plus faible, mais en sens contraire du premier, c'est-à-dire sur la droite qui joint les deux lumières, prolongée du côté opposé à la plus forte. En effet, il est visible que ce point étant à trois pieds de distance de l'autre, il est également éclairé par les deux lumières. Vous voyez par là que les valeurs négatives satisfont comme les positives, aux problèmes ; mais elles doivent être prises dans un sens opposé à celui des valeurs que l'on considère comme positives. Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, à la généralité de laquelle rien n'échappe quand on la sait bien lire.

Elevons-nous maintenant à la considération de l'équation la plus générale du second degré. Quelle que soit cette équation, en transposant tous ses termes dans un seul membre, et en la divisant par le coefficient du carré de l'inconnue, on peut lui donner cette forme : $x^2 + px + q = 0$ p et q étant des quantités quelconques positives ou négatives. Le premier membre de cette équation devient le carré de $x + \frac{1}{2}p$, en lui ajoutant $\frac{1}{4}p^2 - q$; on a donc

$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$; d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Telle est la forme générale des racines des équations du second degré, et vous voyez que ces racines ne peuvent être imaginaires que dans le cas où q est positif, et plus grand que $\frac{1}{4}p^2$.

En examinant, avec attention, la raison pour laquelle l'équation du second degré est susceptible de deux valeurs que nous désignerons par a et b, il est facile de reconnaître que la quantité $x^2 + px + q$ est le produit des deux facteurs $x - a$, et $x - b$, et qu'ainsi l'équation du second degré peut être mise sous la forme $(x - a) \cdot (x - b) = 0$.

Alors, il est visible que cette équation est également satisfaite par la supposition de $x = a$ et par celle de $x = b$. Cette manière d'envisager les équations du second degré, étendue aux équations d'un degré quelconque, est la clef de toute la théorie des équations ; il importe donc de la développer et d'en faire sortir les principaux résultats de cette théorie. »

Laplace P. S., *Leçons de Mathématiques à l'Ecole Normale de l'an III*
Dunod, Paris, 1992, pp. 67-69

Pour en savoir plus

Sur Muhammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al-Khuw%C4%81rizm%C4%AB
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Khwarizmi.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html (en anglais)

Sur François Viète

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Viete.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete.html (en anglais)

Sur Brahmagupta

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Brahmagupta.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html (en anglais)

Sur Diophante d'Alexandrie

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Diophante
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Diophante.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus.html (en anglais)

Sur Laplace

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Laplace.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html (en anglais)