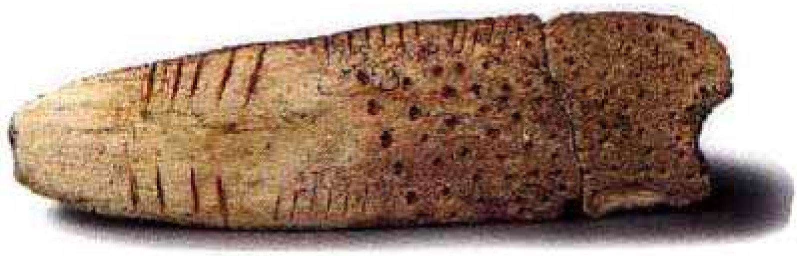
Complément ch 1 - Systèmes de numération

Les plus anciennes traces connues de comptage sont liées à la sédentarisation de groupes humains au Proche-Orient (en Mésopotamie), celui des Sumériens, entre 10 000 et 11 000 ans avant Jésus-Christ, à l'apparition de l'élevage d'ovins et à leur vente sur les premiers marchés. Ainsi ont été découvertes des boules de glaise enfermant six petits cailloux (d'où le mot latin calculus), puis des boules de glaise sur lesquelles six traits figuraient le nombre 6, puis des boules identiques montrant un signe cunéiforme signifiant le nombre 6. La situation de ces boulettes semble montrer qu'elles étaient destinées au comptage des moutons.

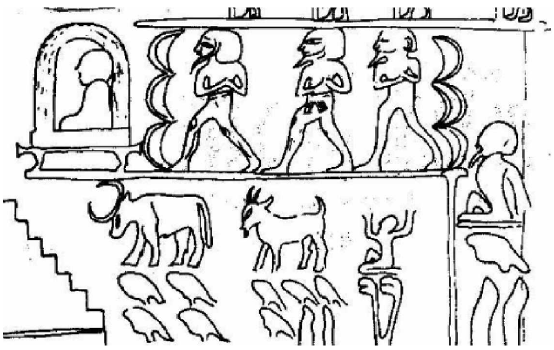


Bois de renne entaillé datant du Paléolithique
(15 000 ans av. J.-C.)

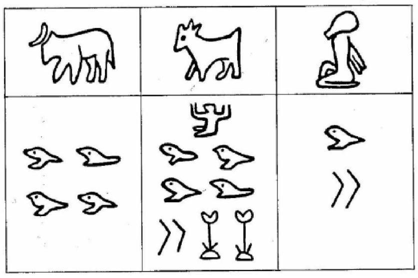
Activité 1 La numération égyptienne

Dans l'Égypte ancienne, certains pharaons faisaient élever des temples en l'honneur de leurs dieux. Ils en faisaient décorer les murs de sculptures et de peintures illustrant les épisodes les plus glorieux de leur vie ou des scènes de la vie quotidienne. Voici les reproductions de trois documents découverts dans deux de ces temples. Ils datent du début du troisième millénaire avant Jésus-Christ.

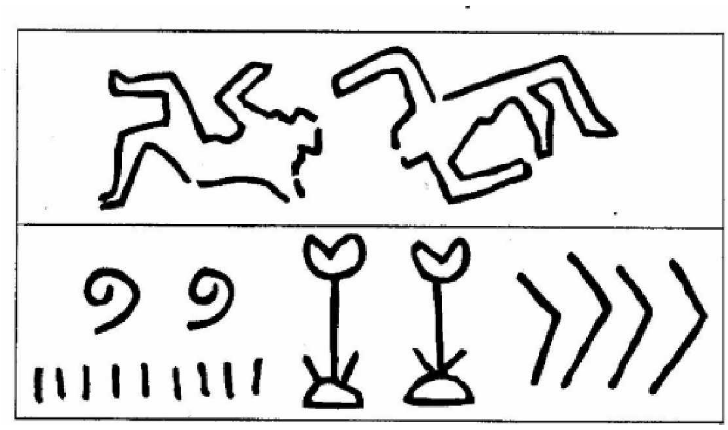
Le premier provient de la tête de la massue symbolisant le pouvoir du roi Narmer. On y trouve des représentations numériques du butin et du nombre de prisonniers ramenés par le souverain lors de ses campagnes victorieuses. Il s'agit du plus ancien document numérique égyptien connu :



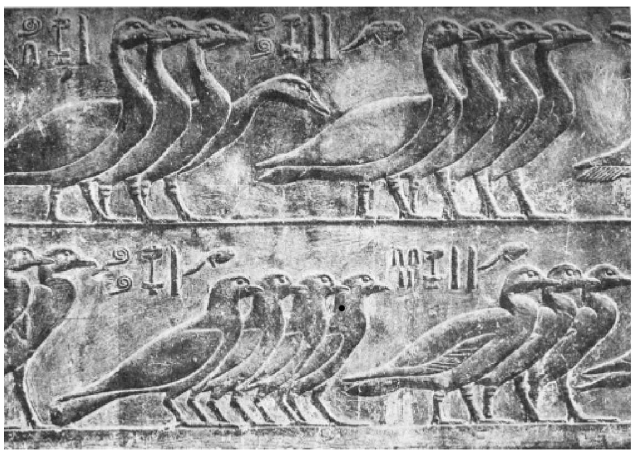
On y indique le nombre d'hommes, de chèvres et de bœufs capturés au cours d'une bataille gagnée par le pharaon de Hiérakonpolis, soit 120000 hommes, 1422000 chèvres et 400000 bœufs, comme précisé ci-dessous :



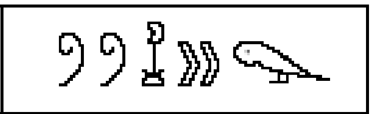
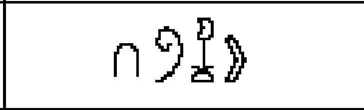
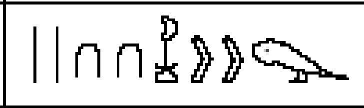
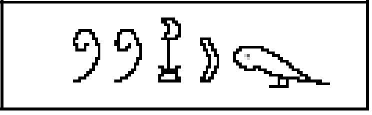
Le second est une reproduction de la partie frontale du soubassement d'une statue de Khasekhem qui représente un nombre d'ennemis massacrés au cours de cette même bataille, soit 42 209 hommes :



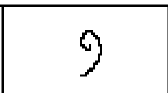
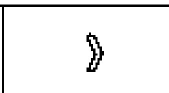
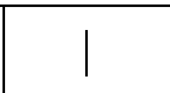
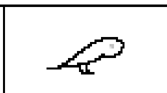
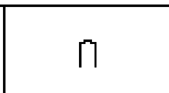
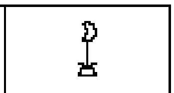
Le troisième document présenté émane d'une gravure trouvée à Saqqara, près de Memphisen (Basse-Égypte) et qui provient de la tombe de Ptahhotep, précepteur à la cour de Pharaon. Ce document représente un nombre de pigeons, d'oies, de canards et de grues qui correspondent aux richesses de la basse-cour :



On peut y lire 121200 pigeons, 11110 oies, 121022 canards et 111200 grues, ce qui est repris dans le tableau suivant :

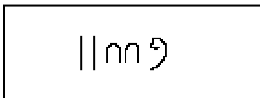
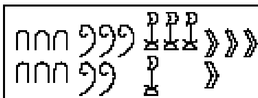
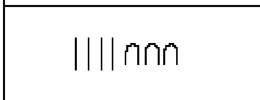
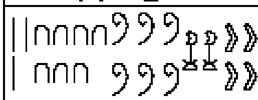
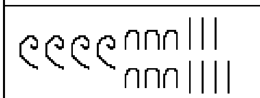
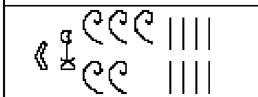
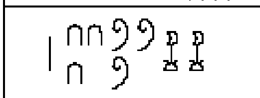
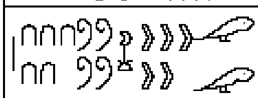
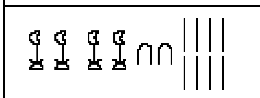
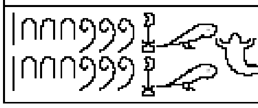
pigeons	
oies	
canards	
grues	

1. Utiliser les informations ci-dessus pour remplir la table de correspondance suivante:

2. Réécrire la table avec les valeurs et leurs symboles correspondants en ordre croissant.

3. A partir du tableau précédent, écrire les nombres égyptiens suivants dans notre système de numération :

4. Écrire les nombres suivants dans le système égyptien : 54, 387, 1376, 5555, 8004, 26214, 12543, 331205, 3100000, 5000034.

Activité 2 La numération romaine

Pour aborder la numération romaine, nous employons une inscription miliaire (se disait des bornes placées au bord des voies romaines pour indiquer les milles) trouvée à Forum Pompilién Lucanie (Italie méridionale)et conservée au Museo Della Civilta Romana à Rome:

ligne 4	LI	51
ligne 5	LXXIIII	74
ligne 5	CXXIII	123
ligne 6	CLXXX	180
ligne 7	CCXXXI	231
ligne 7	CCXXXVII	237
ligne 8	CCCXXI	321
ligne 12	DCCCCXVII	917

Elle fut établie par C.Popilius Laenas, consul entre 172 et 158 avant Jésus-Christ. Dans la transcription de l'original, les symboles qui représentent 50 et 500 afin de leur donner leur forme actuelle (L et D).

1. Utiliser les informations ci-dessus pour remplir la table de correspondances suivante:

V	X	C	I	M	L	D

2. Réécrire la table avec les valeurs et leurs symboles correspondants en ordre croissant.

3. A partir du tableau précédent, écrire les nombres romains suivants dans notre système de numération :

VII	
XXVI	
XXXVIII	
LXVI	
CLXXVI	
CCXXII	

CCCLII	
CX	
MDCLXVI	
MMMDLVI	
MDCCLXVII	
MLI	

4. Écrire les nombres suivants dans le système romain : 9, 17, 67, 238, 361, 512, 1340, 2585, 4003, 3326, 2781, 4657

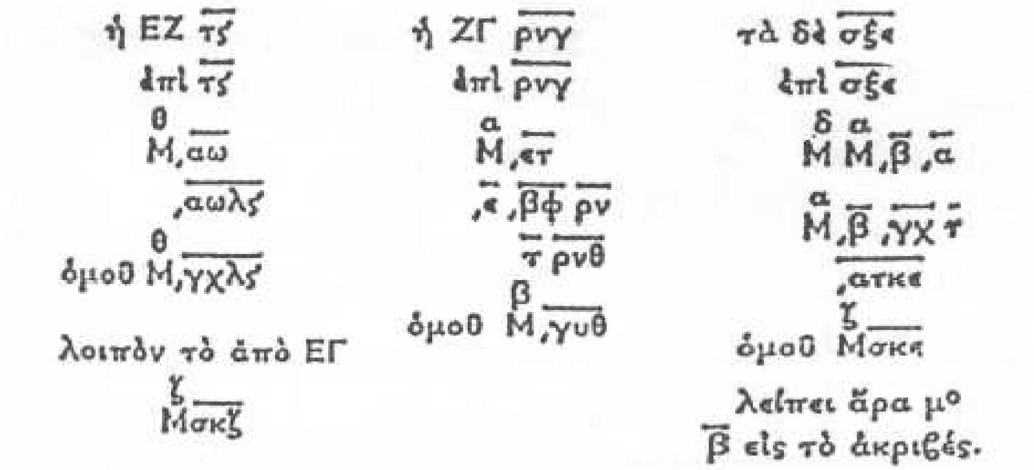
Activité 3 La numération grecque alphabétique

En ce qui concerne la numération alphabétique grecque, il n'y a que peu d'exemples de documents contenant des mentions numériques. La source choisie est le commentaire d'Eutocius au traité d'Archimède sur la Mesure du cercle dans lequel il effectue des opérations en calcul écrit pour trouver une valeur approchée de la longueur d'un segment.

Dans l'Antiquité, les Grecs n'utilisaient pas de signes spéciaux pour écrire les nombres, mais ils se servaient de leur alphabet. A l' époque, ils utilisaient les vingt-sept lettres suivantes :

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\text{ϙ}}$
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$

Un extrait de cet ouvrage figure ci-dessous:


ἡ ΕΖ τϛ
ἐπὶ τϛ
θ Μ,αω
,αωλϛ
θ ὁμοῦ Μ,γχλϛ
λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΕΓ
ζ Μσκζ

ἡ ΖΓ ρνγ
ἐπὶ ρνγ
α Μ,ετ
,ε ,βφ ρν
τ ρνθ
β ὁμοῦ Μ,γυθ

τὰ δὲ σξε
ἐπὶ σξε
δ α Μ Μ,β ,α
α Μ,β ,γχ τ
,ατκε
ζ ὁμοῦ Μσκε
λείπει ἄρα μο
β εἰς τὸ ἀκριβές.

```
EZ     306
×      306
     91800
      1836
somme 93636
```

Il reste le carré de EΓ=70227

```
ZΓ     153
×      153
     15300
      5000
      2500
       150
       300
       159
somme 23409
```

```
       265
×      265
     40000
     12000
      1000
     12000
      3600
       300
      1325
somme 70225
```

cette somme est inférieure de deux unités au carré exact

1. Il s'agit dans un premier temps de bien observer le texte original puis la "traduction" dans notre système pour arriver à comprendre comment la correspondance a pu être remplie, afin de pouvoir l'expliquer à d'autres élèves.
Remarque : pour représenter des nombres supérieurs à la dizaine de mille, les Grecs utilisaient des myriades. Celles-ci ne sont pas proposées dans le cadre de cette activité afin de ne pas compliquer encore plus le problème !

$\overline{\zeta}$	7
$\overline{\kappa\delta}$	24
$\overline{\pi\gamma}$	83
$\overline{\rho\nu\gamma}$	153
$\overline{\upsilon\nu\varsigma}$	456
$\overline{\psi o\theta}$	779
$\overline{{}^{\prime}\alpha\tau\kappa\epsilon}$	1 325
$\overline{\rho\nu}$	150
$\overline{\tau}$	300
$\overline{\tau\varsigma}$	306

$\overline{\sigma\xi\epsilon}$	265
$\overline{{}^{\prime}\alpha\omega\lambda\varsigma}$	1 836
$\overline{{}^{\prime}\beta\text{ϡ}\text{ϙ}\alpha}$	2 991
$\overline{{}^{\prime}\eta\mu\beta}$	8 042
$\overline{{}^{\prime}\gamma\tau\iota}$	3 310
$\overline{{}^{\prime}\theta\phi\eta}$	9 508
$\overline{{}^{\prime}\gamma\chi}$	3 600
$\overline{{}^{\prime}\alpha}$	1 000
$\overline{{}^{\prime}\beta\nu}$	2 500
$\overline{{}^{\prime}\epsilon}$	5 000

2. Utiliser les informations de la page précédente pour remplir la table de correspondances suivante (vu le nombre de symboles utilisés, ils ont déjà été placés dans l'ordre des valeurs correspondantes croissantes):

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\text{ϙ}}$
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$

3. A partir du tableau précédent, écrire les nombres grecs suivants dans notre système de numération:

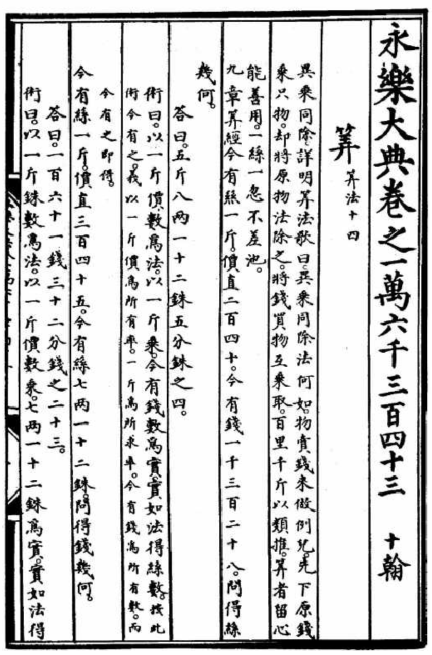
$\overline{\lambda\gamma}$	
$\overline{\text{ϙ}\theta}$	
$\overline{\pi\varsigma}$	
$\overline{\iota\zeta}$	
$\overline{\rho\kappa\gamma}$	
$\overline{\omega\mu\eta}$	

$\overline{{}^{\prime}\epsilon\psi\xi\varsigma}$	
$\overline{{}^{\prime}\theta\chi\iota\beta}$	
$\overline{{}^{\prime}\alpha\chi\text{ϙ}\epsilon}$	
$\overline{{}^{\prime}\varsigma\omega\nu\eta}$	
$\overline{{}^{\prime}\gamma\mu\gamma}$	
$\overline{{}^{\prime}\delta\text{ϡ}\pi}$	

4. Écrire les nombres suivants dans le système grec : 54, 67. 98, 384, 832, 105, 4673, 2745, 3482, 8551, 1209, 9090

Activité 4 La numération chinoise

Les Chinois écrivaient généralement de haut en bas et de droite à gauche. Actuellement, on préfère disposer les symboles horizontalement de gauche à droite. Voici une page d'un document mathématique chinois du XVe siècle et la transcription actuelle de certaines de ses parties.


永樂大典卷之一萬六千三百四十三 十翰

算

六	6
一十九	19
三十二	32
八十四	84
三百四十五	345
七百六十一	761

二百七	207
六千三百五十二	6 352
一千九百八	1 908
一萬六千三百四十三	16 343
八萬一千三百四十九	81 349
七萬五	70 005

1. Il s'agit dans un premier temps de bien observer le texte original puis la "traduction" dans notre système pour arriver à comprendre comment la correspondance a pu être remplie, afin de pouvoir l'expliquer à d'autres élèves.

2. Utiliser les informations ci-dessus pour compléter la table de correspondance suivante:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬

3. A partir du tableau précédent, écrire les nombres chinois suivants dans notre système de numération:

a. 三百四十二

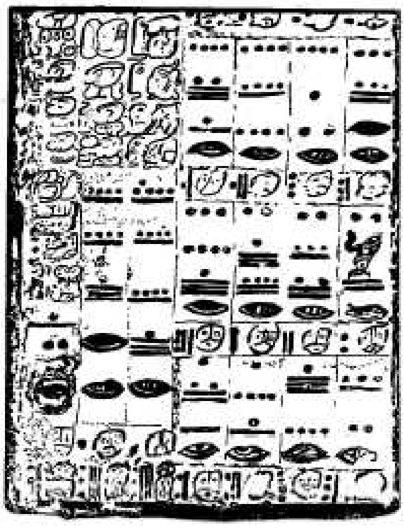
b. 萬一千三百五十二

c. 萬三百

4. Écrire les nombres suivants dans le système chinois : 4, 72, 256, 308, 1007 et 906.

Activité 5 La numération maya

Les Mayas étaient les habitants de certains états d'Amérique centrale (Guatemala,Mexique). Entre le IVe et le IXe siècle, on a pu voir apparaitre leur façon de compter. Voici un extrait d'un document maya (des indiens de Méso-Amérique, le codex dit de Dresde) et la traduction de certaines de ses parties dans notre numération actuelle:



	6
	13
	19
	20
	21
	28

	39
	40
	87
	124
	251
	348

1. Il s'agit dans un premier temps de bien observer le texte original puis la "traduction" dans notre système pour arriver à comprendre comment la correspondance a pu être remplie, afin de pouvoir l'expliquer à d'autres élèves.

2. Utiliser les informations ci-dessus pour remplir la table de correspondances suivante :

•	—	

3. A partir du tableau précédent, écrire les nombres maya suivants dans notre système de numération:

a.

b.

c.

4. Écrire les nombres suivants dans le système maya: 4, 72, 256, 308, 1007 et 906.

Il s'agit maintenant de comparer entre-eux chacun des systèmes de numération étudiés, ainsi que de s'intéresser au notre

1 Déterminer pour chacun de ces six systèmes le nombre de symboles différents employés.

2 Déterminer pour chacun de ces six systèmes la base utilisée.

3 Discuter pour chacun de ces six systèmes la présence ou non d'un zéro.

4 Discuter pour chacun de ces six systèmes l'importance ou non de la position des symboles les uns par rapport aux autres.

5 Discuter pour chacun de ces six systèmes la longueur des écritures, en particulier, cette longueur est-elle proportionnelle à la valeur du nombre représenté.

6 Discuter pour chacun de ces six systèmes le plus grand nombre possible que l'on peut représenter.

7 Discuter pour chacun de ces six systèmes ses limites et ses avantages.

8 Faire une recherche pour déterminer d'où viennent les formes de nos chiffres.

9 Faire une recherche pour déterminer le pourquoi des formes choisies pour représenter telle ou telle valeur dans chaque système.

10 Faire une recherche pour déterminer pourquoi telle ou telle base a été choisie dans chaque système.

11 Faire une recherche pour s'intéresser à l'histoire du zéro.

Une référence pour compléter vos connaissances : http://histoiredechiffres.neuf.fr/numeration

Une référence pour aller (beaucoup !) plus loin: Georges Ifrah, Histoire universelle des chiffres, "L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul",Robert Laffont, collection Bouquins, 1994, en 2 tomes.

12 Écrire, si possible, les nombres suivants dans les cinq systèmes de numération étudiés dans les dossiers précédents : 19, 34, 403, 18654, 2501430.

13 On considère les nombres suivants : 19, 34, 403, 18654, 2501430. Les écrire en base 5, 2 et 16

14 Écrire en base cent vingt trois million quatre cent cinquante six mille sept cent huitante neuf le nombre 123'456'789 (donné ici en base dix).

15 Sur l'origine des symboles égyptiens, voir par exemple : http://www.brunette.brucity.be/atelped/egypte/num.htm

16 Sur l'origine des symboles romains, voir par exemple : http://histoiredechiffres.neuf.fr/numeration et cliquer sur "numération romaine"

17 Sur l'origine du symbole du zéro maya, voir par exemple : http://fr.wikipedia.org/wiki et rechercher "numération maya"

18 Sur l'irrégularité dans la base 20 des mayas et son origine liée au calendrier maya, par exemple : http://histoiredechiffres.neuf.fr/numeration/maya.htm

19 Sur l'origine de nos symboles 1,2,3, ..., voir par exemple : http://histoiredechiffres.neuf.fr/numeration/indiens.htm

20 Sur la naissance du zéro, voir par exemple : http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/$Page.php?IDP=170 \& IDD=0

21 Sur le pourquoi de tel ou tel choix de base, et dans quels pays elles ont ou sont encore utilisées : http://histoiredechiffres.neuf.fr/numeration/bases.htm

Sources pour ce chapitre:

- *« Pour une culture mathématique accessible à tous »,CREM, 2004 - http://www.profor.be/crem*
- *http://www.math93.com/histoire-nombres.htm*
- *http://fr.wikipedia.org/wiki/Num%C3%A9ration_sum%C3%A9rienne*

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

✔ avoir compris ce qu'est un système de numération

✔ avoir compris le fonctionnement les systèmes de numération égyptien, grec, romain, chinois et maya

✔ avoir compris les caractéristiques potentielles d'un système de numération : base, positionnel ou non, avec zéro ou non, relation entre taille de l'écriture et valeur, quantité de nombres représentables, ...; les systèmes de numération ne sont pas tous équivalents

✔ avoir conscience de l'importance des notations et du temps historique qui a été nécessaire pour mettre en place de tels représentations, outils, notations

✔ connaître les principales caractéristiques des cinq systèmes de numération étudiés

✔ avoir pris conscience des fondements et de la puissance de notre système de numération : base 10, positionnel, avec zéro, relation entre taille de l'écriture et valeur, infinité de nombres représentables, ...

✔ être sensibilisé à l'origine des symboles utilisés dans les systèmes égyptien, romains, maya et dans le notre ainsi qu'à l'histoire du zéro

Savoirs-faire

✔ savoir lire et représenter des nombres dans les systèmes de numération étudiés à partir de tables de conversion

✔ savoir écrire dans différentes bases: transcrire des nombres de notre système dans une autre base et transcrire des nombres écrits dans une autre base dans notre système

Bilan