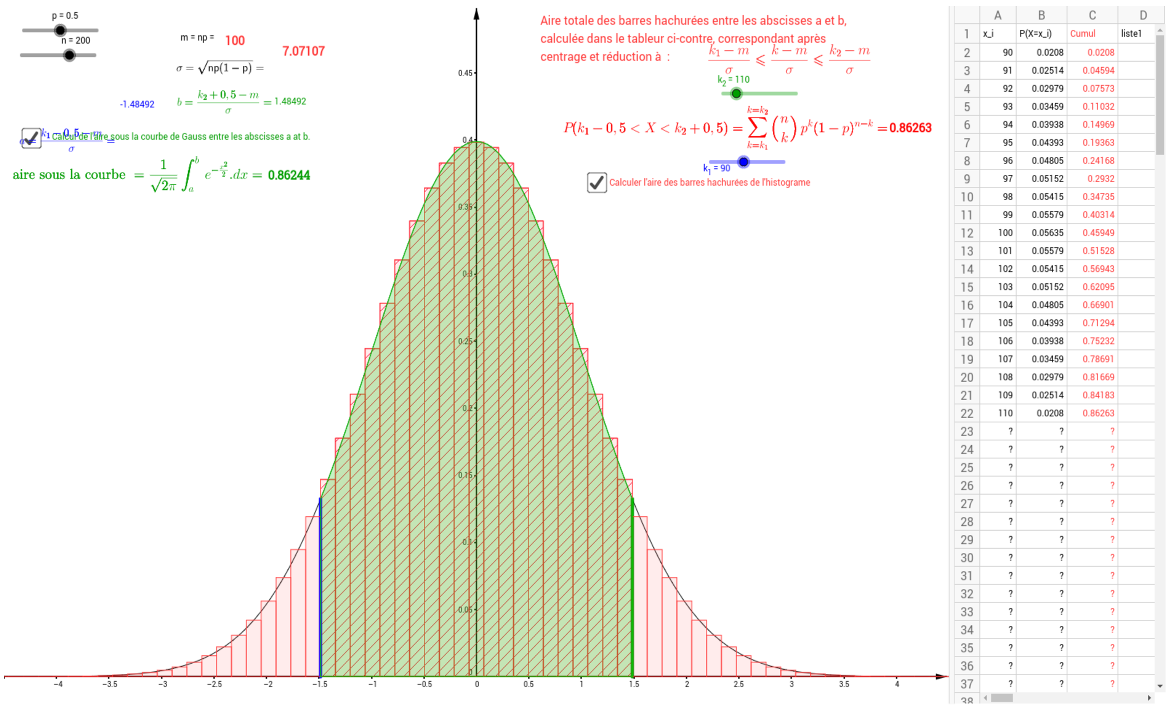


Approximation de la binomiale par la loi normale

Problème

On écrit écrit un poème en heptasyllabes (vers de 7 syllabes) en respectant les règles suivantes :
- le poème commence par le vers « Que les maths sont belles, what else! » (7 mots d'une syllabe)
- tous les mots entre 1 et 7 syllabes peuvent être utilisés ;
- deux vers distincts peuvent avoir la même structure quant aux nombres de syllabes des mots, mais alors ils n'auront pas la même succession de nombres de syllabes par mot. Par exemple : «Pythagore je vous adore», avec 3-1-1-2 syllabes suivi de « Thalès tous nous intéresse », avec 2-1-1-3 syllabes.

De combien de vers le poème se composera-t-il au maximum ?

1 [Souvenirs] Combinatoire en 3e

1 Deux personnes jouent au tennis selon les règles suivantes : le premier qui gagne deux jeux de suite ou qui gagne trois jeux au total gagne la partie. Combien de parties différentes peuvent-ils jouer?

2 Un menu de restaurant propose 10 hors d'oeuvres, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun un de ces 4 plats?

3 On suppose qu'il n'y a pas de répétition. On emploie les 6 chiffres 2,3,5,6,7 et 9.

a. Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?

b. Combien de ces nombres sont pairs?

c. Combien de ces nombres sont inférieurs à 400?

d. Combien de ces nombres sont multiples de 5?

e. Et si on admet pouvoir choisir plusieurs fois le même chiffre, qu'est-ce que cela change pour les 4 questions précédentes ?

4 Combien de mots différents peut-on former :

a. avec des lettres du mot GENOVA ?

b. avec des lettres du mot GENEVA ?

c. avec des lettres du mot GENEVE ?

5 Dans un voilier, chaque signal est constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

6 Pour mettre sur pied le voyage d'étude d'une classe de 20 élèves, comprenant 9 filles, six organisateurs doivent être choisis parmi les élèves :

a. Combien y a-t-il de possibilités ?

b. Combien de possibilités seront-elles seulement composées de filles ?

c. Combien de possibilités seront-elles mixtes ?

7 On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Chacun reçoit 9 cartes.

a. Quel est le nombre de distributions différentes ?

b. Combien d'entre-elles permettent-elles à l'un des joueur d'avoir les 4 valets ?

2 [Souvenirs] Probabilités en 3e

1 On jette deux dés (non truqués, à six faces – données implicites par défaut).

a. Pourquoi parle-t-on d'**expérience aléatoire** ?

b. Déterminer deux **événements élémentaires** de votre choix E_1 et E_2.

c. Combien d'**événements élémentaires** contient l'univers Ω de l'expérience?

d. Donner deux exemples de votre choix d'**événements** non élémentaires A et B **incompatibles** et déterminer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cup B)$.

e. Donner deux exemples de votre choix d'**événements** non élémentaires C et D **non disjoints** et déterminer $p(C)$, $p(D)$ et $p(C \cup D)$.

f. Déterminer un événement E tel que $p(E)=\frac{35}{36}$.

g. Déterminer $p(\overline{C})$, où C est le **complémentaire** de l'événement C choisi au point e).

2 Soit un univers Ω. On dit qu'on définit **une probabilité** sur Ω si et seulement si on associe à chaque événement aléatoire A une probabilité P(A) de telle sorte que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1 : $P(A)\geq 0$ pour tout événement A
- Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$
- Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles, alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Illustrer cette construction dans le cas où :

a. On lance une pièce de monnaie non truquée.

b. On lance une pièce de monnaie truquée.

c. On lance deux dés non truqués.

Souvent, les caractéristiques physiques d'une expérience suggèrent que tous les probabilités des événements élémentaires $p(A_i)$ soient toutes égales. Un tel ensemble probabilisé fini Ω est alors appelé **ensemble fini équiprobable**.

d. Donner des exemples ensembles finis équiprobables.

e. Donner des exemples ensembles finis non équiprobables.

Dans le cas d'un ensemble fini équiprobable Ω contenant n éléments (correspondant à une expérience aléatoire à n issues), et où A est un événement aléatoire ($A\subseteq\Omega$), on a $p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$, ou encore $p(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables (à la réalisation de } A\text{)}}{\text{nombre de cas possibles (dans } \Omega\text{)}}$, ce qui correspond à la notion intuitive de probabilité.

3 A partir de nos trois axiomes, démontrer les théorèmes suivants :

a. Théorème 1 : $p(\varnothing)=0$

b. Théorème 2 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$

c. Théorème 3 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

d. Théorème 4 : Soit $A\subseteq\Omega$. Alors $p(\overline{A})=1-p(A)$

4 Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. On note p_i la **probabilité** de tirer la boule portant le chiffre i. On sait que $p_1=p_2=p_3=p_4$ et $p_5=p_6=p_7=2\cdot p_1$. On tire une boule, calculer la probabilité de tirer :

a. la boule portant le chiffre 6 ;

b. une boule portant un chiffre pair ;

c. une boule portant un chiffre qui soit au plus égal à 6 ;

d. une boule portant un chiffre qui soit pair et au plus égal à 6 ;

e. une boule portant un chiffre qui soit pair ou au plus égal à 6.

5 On jette une pièce de monnaie 12 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. au moins une fois pile ?

b. au moins deux fois pile ?

c. exactement 4 fois pile ?

6 Un grand collège est équipé d'un système d'alerte ultra-moderne. S'il y a incendie, l'alerte est donnée avec 99% de certitude; s'il n'y a aucun danger, l'alarme peut se déclencher avec probabilité 0,005. La probabilité d'incendie est 0,0001. L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

7 La famille Robert a 2 enfants, la famille Foret en a 3. On considère les événements suivants:

A: la famille a des enfants des 2 sexes, et B: la famille a au plus un garçon.

A et B sont-ils indépendants :

a. chez les Robert ?

b. chez les Foret ?

8 Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien doit-on prendre de personnes pour être sûr à 95 % d'avoir au moins un daltonien ?

Voir la théorie de 3e année et les exercices 1 à 16

3 [Activité] Variables aléatoires et espérance mathématique

1 On vous propose un jeu. Vous avez une chance sur 10 de gagner 10.- et 9 chances sur 10 de perdre 1.-.

a. Acceptez-vous de jouer une fois ?

b. Quelle(s) modification(s) pourriez-vous apporter au jeu pour augmenter vos chances de gain? Définir la notion de **variable aléatoire** pour modéliser cette situation.

c. Définir la notion d'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire.

2 Un échantillon de 3 objets est choisi au hasard d'une boîte contenant 12 objets parmi lesquels 3 sont défectueux. Soit X est la variable aléatoire qui détermine le nombre d'objets défectueux.

a. Établir la **distribution de probabilité** (ou f**onction de probabilité** ou l**oi de probabilité**) de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique X.

3 On lance une pièce 3 fois de suite et on s'intéresse au résultat obtenu. On note F pour face et P pour pile.

a. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

On s'intéresse au nombre de F obtenus.

Pour cela, on pose, pour tout événement ω : $X(\omega)$ = nombre de F dans ω

b. Pour chaque $\omega\in\Omega$, déterminer $X(\omega)$ et représenter la situation dans une table de valeurs.

c. On s'intéresse maintenant aux probabilités associées : pour chaque événement aléatoire , $\omega\in\Omega$ déterminer $p(\omega)$ et ajouter cette information dans la table.

d. En fait, on ne s'intéresse qu'au nombre de F obtenus, on peut donc condenser l'information dans la table ci-dessous :

x				
p				

e. On note f_X la fonction définie par $f_X(x) = p(X=x)$. Etablir le lien entre les trois fonctions X, f_X et p.

f. Représenter graphiquement la fonction f_X à l'aide d'un diagramme en barres.

g. On définit le nombre $E(X)$ par $E(X)=\sum_i x_i \cdot p_i$. Déterminer $E(X)$ dans notre exemple.

h. Quel sens peut-on donner à $E(X)$?

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 17 à 26

4 [Activité] Propriétés de l'espérance

1 On lance deux dés (non truqués à six faces).

a. Déterminer l'univers Ω de l'expérience aléatoire.

On considère les variables aléatoires suivantes sur Ω : X = « résultat du premier dé » et Y = « résultat du deuxième dé ».

b. Déterminer les tables de valeurs de $f_X(x)$ et $f_Y(x)$

c. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.

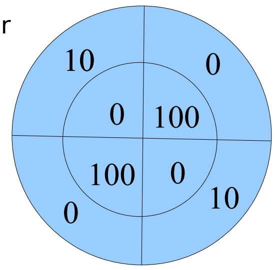
On considère maintenant les variables aléatoires $(X+Y)$ et $(X\,Y)$ définies sur Ω par :

- $X+Y$ = somme des résultats des 2 jets
- XY = produits des résultats des 2 jets

d. Déterminer les tables de valeurs de $f_{X+Y}(x)$ et $f_{XY}(x)$, ainsi que $E(X+Y)$ et $E(XY)$.

e. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous tirer de cet exemple ?

2 On considère le jeu suivant : on fait tourner la flèche qui finit par arrêter sur une position, et on pose:



- X = résultat obtenu dans le cercle intérieur
- Y = résultat obtenu dans le cercle extérieur
- $X+Y$ = somme des résultats obtenus dans les 2 cercles
- XY = produit des résultats obtenus dans les 2 cercles

a. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$, $E(X+Y)$ et $E(XY)$.

b. Ceci vous amène-t-il à modifier les conjectures énoncées en 1. ?

c. Quelle est la différence entre les variables aléatoires X et Y dans 1. et dans 2. ?

3 Enoncer et discuter la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires, puis déduire de ces exemples des « Propriétés de l'espérance ».

4 La famille C. est composée de six membres, tous grands chasseurs. Les six C. tirent sur six canards. Chaque C. choisit un canard au hasard et ne le manque jamais. X est le nombre de canards qui s'en sortent ?

5 [Activité] Variance

1 On donne ci-dessous les résultats d'une volée d'élèves à un examen écrit de mathématiques. :

note	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	0	2	12	45	67	35	11

On considère la variable aléatoire X définie comme étant la note obtenue à l'examen écrit de mathématiques. Discuter des conditions nécessaires pour pouvoir légitimement considérer que sa loi est donnée par le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	0	$\frac{2}{172}$	$\frac{12}{172}$	$\frac{45}{172}$	$\frac{67}{172}$	$\frac{35}{172}$	$\frac{11}{172}$

a. Quelle note peut « espérer » un élève ?

Supposons que les données soient :

note	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	0	14	40	15	17	45	41

b. Quelle note peut espérer un élève dans cette nouvelle situation ?

c. Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus dans les deux situations précédentes.

d. Ces deux situations vous paraissent-elles sensiblement identiques ?

e. Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer ?

2 Donner et illustrer la définition de ce qu'on appelle la **variance** et **l'écart-type**.

3 Illustrer le fait que $E(X^2) \neq E(X)^2$!

4 On jette deux dés équilibrés. On désigne par X le plus grand des deux chiffres obtenus. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

5 Démontrer que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

6 Recalculer $V(X)$ du point 4. en utilisant cette formule.

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 27 à 34

Prérequis et activités de découverte

6 [Activité] Loi binomiale

1 Les statistiques montrent qu'il y a environ 105 naissances de garçons pour 100 naissances de filles. En supposant que le sexe des nouveau-nés n'est du qu'au hasard, quelle est la probabilité d'avoir :

a. exactement 2 garçons en ayant 5 enfants ?

b. au plus 2 garçons en ayant 5 enfants ?

c. exactement 15 filles en ayant 27 enfants ?

2 Soit une expérience aléatoire à deux issues: échec (E) ou succès (S), avec p(S) = p et donc p(E) = 1 - p, qu'on note aussi q. Une telle expérience est appelée **expérience de Bernouilli**.

On répète n fois cette même expérience, de façons indépendantes les unes des autres, et on s'intéresse au nombre de succès obtenus. On considère donc la variable aléatoire X définie par X="nombre de succès en n essais". On dit que X suit une **loi binomiale** et on le note $X\sim B(n;p)$

Illustrer avec d'autres exemples.

3 Démontrer le théorème suivant :

Théorème : Si $X\sim B(n;p)$, alors on a : $p(X=k)=C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$

Remarque : on note aussi souvent $C_k^n=\binom{n}{k}$ qui est appelé **coefficient binomial**.

4 Comment utiliser la calculatrice pour calculer facilement avec la loi binomiale ?

5 On jette 15 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. 7 fois « pile » ? **b.** 9 fois « face » ? **c.** au moins 2 fois « pile » ?

6 Explorer des distributions de lois binomiales avec un tableur ou GeoGebra.

7 [Aller plus loin] Espérance et variance de la loi binomiale

Soit $X\sim B(n;p)$. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

8 [Activité] Un exemple

On jette 15 fois une pièce de monnaie et on note X le nombre de « pile » obtenu. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

9 [Aller plus loin] Loi de Poisson

Suite à une étude statistique, un fournisseur d'accès à Internet (constate qu'il reçoit en moyenne, entre 11h et 12h, 3 appels téléphoniques par minute. On suppose que le nombre d'appels reçus pendant une minute X est une variable aléatoire.

a. Expliquer ce qu'on entend si on dit que X suit une **loi de Poisson**.

b. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

c. Calculer la probabilité pour qu'entre 11h30 et 11h31 :

i il n'y ait aucun appel ;

ii il y ait exactement un appel ;

iii il y ait plus de deux appels ;

iv il y ait moins de trois appels.

10 [Aller plus loin] Approximation par une loi de Poisson

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

a. Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ? Interpréter concrètement le résultat trouvé.

On ajuste cette distribution par une loi de Poisson.

b. Justifier cette décision et préciser le paramètre.

c. Comparer avec un ajustement par la loi binomiale.

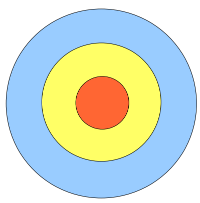
d. Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la réalité.

Voir la théorie 5 à 8 et les exercices 35 à 40

11 [Activité] Lois continues

Soit $X \sim B(100\,;p)$; supposons qu'on doive calculer $P(26<X\leq 71)$ … Comment le faire efficacement ? Les lois continues vont nous permettre de trouver une solution à ce problème …

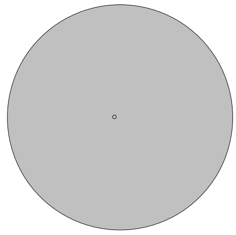
1 Considérons une cible sur laquelle une jeune recrue tire de façon aléatoire.



a. Un premier modèle consiste à considérer que la cible est constituée de 3 zones : une extérieure (bleue), une médiane (jaune) et une centrale (rouge), qui valent respectivement 1 point, 5 points et 10 points. On admet que la probabilité d'atteindre ces zones est respectivement de 0,5, 0,35 et 0,15.

On considère la variable aléatoire X qui compte les points après deux tirs. Cette variable aléatoire est dite **discrète**, c'est-à-dire qu'elle prend ses valeurs "par sauts".
Déterminer la l**oi de probabilité** de X et la représenter graphiquement.

b. Un second modèle consiste à considérer la cible «globalement» : on considère la variable aléatoire Y qui mesure la distance entre l'impact et le centre de la cible. Cette variable aléatoire est dite **continue**, c'est-à-dire qu'elle prend ses valeurs dans un intervalle réel ou dans $\mathbb{R}$ tout entier.



La question du calcul de probabilité doit alors être reconsidérée ...

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité d'une issue unique sera toujours nulle : $P(X=a)=0$, on mesurera toujours la probabilité d'appartenir à un intervalle, par exemple $P(a\leq X\leq b)$ ou $P(a\leq X)$ ou $P(X\leq b)$. Comme $P(X=a)=0$, on aura aussi : $P(a\leq X\leq b)=P(a<X\leq b)=P(a<X\leq b)=\ldots$, $P(a\leq X)=P(a<X)$ ou $P(X\leq b)=P(X<b)$.

On appelle **fonction de densité**, ou **densité de probabilité**, sur un une fonction réelle f continue qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(x)\geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

Si, de plus, on a, pour une variable aléatoire continue X : $P(a<X\leq b)=\int_a^b f(x)dx$, alors on dit que f est la **fonction de densité** de X, ou la **densité de probabilité** de X. On appelle **fonction de répartition** de X (associée à f) la fonction F définie par $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2 Soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** sur I=[1;8]. Ceci signifie que la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans un sous intervalle de I est proportionnelle à la longueur du sous-intervalle.

a. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de densité f de X.

b. Calculer $P(3 < X < 5)$, $P(3 \leq X < 5)$, $P(3 < X)$ et $P(X = 2)$.

c. Représenter graphiquement la fonction de répartition F.

3 On considère la fonction réelle définie par $f(x)=\begin{cases}\cos(x), \text{si } & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$

a. Représenter graphiquement f et montrer que c'est une fonction de densité..

On admet que Y est une variable aléatoire dont la fonction de densité est f.

b. Calculer et interpréter graphiquement : $P(0\leq Y\leq\frac{\pi}{6})$, $P(\frac{\pi}{6}\leq Y\leq\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3}\leq Y\leq 0)$.

c. Expliquer comment cette fonction peut être vue comme un modèle probabiliste continu de l'exemple de la cible vu en 1.b ?

12 [Aller plus loin] Grader ?

Reprendre les données de l'activité précédente (11.3). Combien de fois la jeune recrue doit-elle tirer si elle veut avoir une probabilité d'au moins 0,9 de toucher au moins une fois à moins de 10cm du centre de la cible (condition nécessaire pour devenir jeune caporal) ? (on suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres).

13 [Activité] Espérance et variance d'une loi continue

Soit f la fonction de densité d'une variable aléatoire continue X. Alors on définit l'**espérance mathématique** de X (aussi notée) par $E(X)=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$, la **variance** de X (aussi notée σ^2) par $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$ et l'**écart-type** par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

On peut démontrer la formule suivante (théorème sur la variance) qui permet de simplifier les calculs (comme dans le cas discret) : $V(X)=E(X^2)-\mu^2$

Calculer la moyenne et l'écart-type de X suivant la loi uniforme de l'activité 11.2.

14 [Aller plus loin] Espérance et variance d'une loi continue

Calculer la moyenne et l'écart-type de X suivant la loi continue de l'activité 11.3.

Indication : on trouve dans la table $\int x\cos(x)\,dx \overset{\text{table num}}{=} x\sin(x)+\cos(x)+C$ et $\int x^2\cos(x)\,dx \overset{\text{table num}}{=} x^2\sin(x)-2\sin(x)+2x\cos(x)$ Vérifier que c'est vrai puis les utiliser pour les calculs

Voir la théorie 9 à 10 et les exercices 44 à 45

15 [Activité] Une première loi normale

Parmi toutes les fonctions de densité, il y en a une qui s'avère particulièrement intéressante ...

Soit f_1 définie par $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a. Représenter graphiquement f_1 avec GeoGebra.

b. Etudier la fonction f_1 de façon à retrouver cette représentation graphique.

c. On admet que $\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1$. Montrer que f_1 est une fonction de densité.

Une variable aléatoire continue Z définie sur $\mathbb{R}$ suit une **loi normale centrée réduite** si f_1 est sa densité de probabilité. On note $Z \sim N(0;1)$.

16 [Activité] Calculs

1 Soit $Z \sim N(0;1)$. On considère les calculs de probabilités suivants :

i $P(Z \leq 1{,}43)$	v $P(0 \leq Z \leq 2{,}1)$
ii $P(Z < 3{,}86)$	vi $P(Z \geq -0{,}38)$
iii $P(Z \leq -0{,}97)$	vii $P(-1{,}45 \leq Z \leq 0)$
iv $P(0{,}56 \leq Z \leq 2{,}56)$	viii $P(-1{,}46 \leq Z \leq 1{,}91)$

a. Expliquer pourquoi ils posent problème ?

b. Déterminer ces probabilités à l'aide de votre **table numérique** ou de la **calculatrice** en arrondissant au 10 millième et en interprétant géométriquement.

2 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ (dite courbe normale) comprise entre 0 et z soit égale à 0,4370.

3 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ à gauche de z soit égale à 0,1453.

4 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ comprise entre -1,7 et z soit égale à 0,0432.

17 [Activité] Espérance et variance

Démontrer le théorème suivant : Si $Z \sim N(0;1)$, alors $E(Z)=0$ et $Var(Z)=1$

18 [Activité] Autres lois normales

Soit f définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

a. Représenter graphiquement f avec GeoGebra en faisant varier μ et σ .

On peut montrer que f est une fonction de densité. Une variable aléatoire continue Y définie sur $\mathbb{R}$ suit une **loi normale** (ou **loi de Laplace-Gauss**) de paramètres μ et σ ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$) si f est sa densité de probabilité.

On note alors $Y \sim N(\mu;\sigma)$.

b. Expliquer pourquoi on parle de loi « centrée réduite » pour $X \sim N(0;1)$.

19 [Activité] Calculs

1 Soit $Z \sim N(2;1{,}4)$. On considère les calculs de probabilités suivants :

i $P(Z \leq 1{,}43)$

ii $P(Z \leq -0{,}97)$

iii $P(0{,}56 \leq Z \leq 2{,}56)$

iv $P(2 \leq Z)$

v $P(Z \geq -0{,}38)$

vi $P(-1{,}46 \leq Z \leq 1{,}91)$

a. Déterminer ces probabilités à l'aide de la **calculatrice** en arrondissant au 10 millième et en interprétant géométriquement.

b. Effectuez quelques calculs en utilisant la méthode « **centrer-réduire** »

2 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ (dite courbe normale) comprise entre 2 et z soit égale à 0,4370.

3 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ à gauche de z soit égale à 0,1453.

4 Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ comprise entre 0 et z soit égale à 0,0432.

20 [Aller plus loin] Espérance et variance des lois normales

Démontrer le théorème suivant : Si $Y \sim N(\mu;\sigma)$, alors on a : $E(X)=\mu$ et $Var(X)=\sigma$

21 [Activité] Applications

1 La température en Suisse au mois de mai suit une loi normale de moyenne 20°C et d'écart-type 3°C. Calculer la probabilité que la température un jour donné de mai soit comprise entre 21°C et 26°C.

2 La taille des conscrits suit une loi normale de moyenne 173 cm et d'écart-type 8 cm. Quelle est la probabilité qu'un conscrit pris au hasard mesure entre 160 cm et 175 cm ?

Voir la théorie 11 et les exercices 46 à 49

22 [Activité] Approximation de la loi binomiale par la loi normale

1 On lance une pièce de monnaie 100 fois. Quelle est la probabilité que le nombre de faces obtenues soit supérieur ou égal à 40 ?

a. Pourquoi n'est-il pas très facile d'utiliser une loi binomiale ?

b. Rappel : si $X \sim B(n,p)$, alors $E(X)=\mu=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Théorème [sans démonstration] : La fonction de densité de Y approxime de façon très satisfaisante la loi de probabilité de $X \sim B(n,p)$.

Remarque : on peut démontrer qu'on obtient une précision acceptable déjà pour $np>5$ et $nq>5$, où $q=1-p$.

On a donc $P(a\leq X\leq b)\simeq P(a\leq Y\leq b)$

c. Tracer avec un outil de calcul les diagrammes en bâton des lois de probabilités des variables binomiales suivantes :

i $n=20$; $p=0.2$	iv $n=50$; $p=0.2$	vii $n=100$; $p=0.2$
ii $n=20$; $p=0.4$	v $n=50$; $p=0.4$	viii $n=100$; $p=0.4$
iii $n=20$; $p=0.5$	vi $n=50$; $p=0.5$	ix $n=100$; $p=0.5$

d. Ajouter dans chaque cas les approximations par la loi normale associée.

e. Expliquer pourquoi on améliore encore l'approximation en considérant $P(a\leq X\leq b)\simeq P(a-0{,}5\leq Y\leq b+0{,}5)$

f. Résoudre ainsi le problème initial.

2 Au jass, après chaque donne, on a neuf cartes en main. Il y a quatre couleurs (pique, cœur, trèfle et carreau) et neuf cartes par couleur (6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). On considère l'événement A = « obtenir 4 cartes identiques entre le 9 et l'as ».
On effectue une donne.

a. Calculer $P(A)$ et garder ce résultat dans la mémoire de la calculatrice.

On procède maintenant à 100 donnes successives (toutes indépendantes les unes des autres) et on considère la variable aléatoire X : «nombre de fois qu'on obtient A».

b. Calculer $P(X=30)$.

c. Calculer $P(X < 30)$.

d. Calculer $P(X \geq 30)$.

e. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X et garder ces résultats dans la mémoire de la calculatrice.

f. Quelle est la loi normale qui permet d'approximer la loi de probabilité de X ? Effectuer ce calcul.

g. Montrer qu'on peut encore améliorer cette approximation.

h. Interpréter graphiquement ces résultats avec GeoGebra.

3 Pour se prémunir contre les 10% de défections tardives habituellement constatées (passagers ayant acheté leurs places mais ne se présentant pas à l'embarquement), la compagnie aérienne Air-Horace pratique la surréservation pour ses deux vols quotidiens :

- pour les vols Sauscity-Matuville, elle vend 32 billets pour les 30 sièges disponibles ;
- pour les vols Sauscity-Longbeach, elle vend 270 billets pour les 250 sièges disponibles.

NB : Pour la suite de ce problème, on supposera que chaque passager ayant un billet a une probabilité de 10% de ne pas se présenter à l'embarquement, et ce de manière indépendante des autres passagers.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant acheté leur place pour le vol Sauscity-Matuville du samedi 24 juin et qui se présenteront à l'embarquement.

a. Nommer le type de loi de probabilité que suit X.

b. Quelle est la probabilité que les 32 personnes ayant acheté leur billet se présentent à l'embarquement le 24 juin ?

c. Quelle est la probabilité que la compagnie se retrouve avec plus de passagers que de sièges disponibles le 24 juin ?

Soit Y la variable aléatoire désignant le nombre de personnes ayant acheté leur place dans le vol Sauscity-Longbeach de dimanche 25 juin et qui se présenteront à l'embarquement.

d. Calculer la moyenne et l'écart-type de Y.

e. Par quelle loi peut-on approcher la loi de probabilité que suit Y ?

f. Utilisez cette approximation pour calculer la probabilité que Y ne dépasse pas 250.

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 50 à 57

1 [A savoir] Variable aléatoire

Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω .
Une **variable aléatoire** X sur l'ensemble Ω est une fonction qui, à chaque événement ω de Ω , associe un nombre réel $X(\omega)$, ce qu'on peut également représenter ainsi :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \rightarrow & X(\omega) \end{array}$$

Le plus souvent, la variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes qu'on note $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ avec des probabilités respectives $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & f_X(x) \end{array}$, où $f_X(x) = p(X=x)$ s'appelle la **distribution de X** ou la **fonction de probabilité de X** ou la **loi de probabilité de X**.

On peut également représenter cette situation ainsi : $\begin{array}{c} \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f_X} [0;1] \\ \omega \rightarrow x \rightarrow p \end{array}$

Exemple : on lance deux fois un dé truqué à 4 faces avec lequel les probabilités d'obtenir 1, 2 ou 3 sont respectivement de 10 %, 20 % et 40 %. On s'intéresse au nombre de fois qu'on obtient un 4. Quelle variable aléatoire X considérer ? Donner sa table de valeurs avec les probabilités associées.

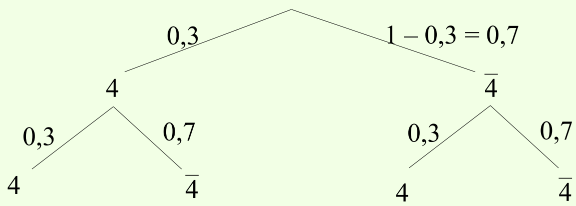
On pose : X= nombre de « 4 » (en lançant deux fois le dé truqué)

Les valeurs possibles de X sont 0, 1 ou 2. Il faut déterminer leurs probabilités.

Il manque la probabilité p(« 4 ») d'obtenir un « 4 » en lançant une fois le dé, qu'on peut noter p_4... Mais comme on connaît les probabilités des autres événements élémentaires « 1 », « 2 » et « 3 », on peut la calculer :
$p(\Omega)=p(1\cup 2\cup 3\cup 4)=p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=0{,}1+0{,}2+0{,}4+p_4=1$, c'est-à-dire

p_4= 1 – 0,4 – 0,2 – 0,1 = 0,3

On peut ensuite considérer un arbre de l'expérience qui soit adapté à notre variable aléatoire X en séparant les cas entre « obtenir un 4 » et « ne pas obtenir un 4 » :



On a donc : $p(X=0)=p(\overline{4}\cap\overline{4})=0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}49$

$p(X=1)=p((4\cap\overline{4})\cup(\overline{4}\cap 4))=p(4\cap\overline{4})+p(\overline{4}\cap 4)=0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}42$

$p(X=2)=p(4\cap 4)=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09$

remarque : on a bien 0,49+0,42+0,09=1

On peut représenter la situation dans une table de valeurs :

X :

x	0	1	2
$f_X(x) = p(X=x)=p$	0,49	0,42	0,09

2 [A savoir] Espérance

Définition

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le nombre réel

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

On appelle aussi souvent l'espérance mathématique la **moyenne** et on note $E(X)=\mu$.

Exemple : on lance deux fois un dé truqué à 4 faces avec lequel les probabilités d'obtenir 1, 2 ou 3 sont respectivement de 10 %, 20 % et 40 %. On s'intéresse au nombre de fois qu'on obtient un 4. On considère X = « nombre de 4 ». Quelle est son espérance ?

On reprend la table de valeur de X déterminée dans l'exemple précédent :

X :

x	0	1	2
$f_X(x) = p(X=x)=p$	0,49	0,42	0,09

$$E(X)=\sum_{i} x_i \cdot p_i = 0\cdot 0{,}49+1\cdot 0{,}42+2\cdot 0{,}09=0{,}6$$

Cela signifie qu'en moyenne, on obtiendrait 0,6 fois un « 4 » en jetant deux fois ce dé.

3 [A savoir] Propriétés de l'espérance

Définition

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur le même Ω .
X et Y sont **indépendantes** $\Leftrightarrow$ $p(X=x$ et $Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$ pour tous x , $y \in \mathbb{R}$

Théorème « Propriétés de l'espérance »

Soit X et Y des variables aléatoires. Alors on a :

- ☐ Si $X=\alpha$, avec $\alpha\in R$, alors $\mathrm{E}(X)=\alpha$
- ☐ Si $\alpha\in R$ et $\beta\in R$ alors $\mathrm{E}(\alpha X+\beta)=\alpha \mathrm{E}(X)+\beta$
- ☐ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ [sans démonstration]
- ☐ Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ [sans démonstration]

Exemple : on lance cinq fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire X = « nombre total de points ». Quelle est l'espérance de X ?

Normalement, on devrait considérer toutes les valeurs possibles de X, soit les nombres de 3 à 12, puis calculer toutes les probabilités associées ... ce serait fastidieux.

On peut procéder de façon plus astucieuse : on définit X_i = « résultat du i-ème jet », pour i=1,2,...,5. On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

Or on peut facilement calculer $E(X_i)$!

En effet, pour tout X_i :

X_i :

x	1	2	3	4
p	0,25	0,25	0,25	0,25

Et on peut calculer $E(X_i)$ = 0,25(1+2+3+4)=2,5

Puis on utiliser les propriétés de l'espérance :
$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_5)$, d'où $E(X) = 5E(X_i) = 12{,}5$

Voir les exercices 17 à 26

4 [A savoir] Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, …, x_n avec des probabilités respectives p_1, p_2, p_3, …, p_n, et soit $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$ l'espérance de X.

La **variance** de X est le nombre $V(X) = E((X-\mu)^2)$

C'est l'espérance des carrés des écarts à l'espérance, ou la moyenne des carrés des écarts à la moyenne !

On a également : $V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot f_X(x_i)$

L'**écart-type** de X est le nombre $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Théorème

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, …, x_n avec des probabilités respectives p_1, p_2, p_3, …, p_n. Alors on a : $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.

Théorème « Propriétés de la variance»

Soit X et Y des variables aléatoires. Alors on a :
- ☐ Si α est constante, alors $V(\alpha) = 0$
- ☐ Si α est constante et X est une v.a, alors $V(\alpha + X) = V(X)$
- ☐ Si α est constante et X est une v.a, alors $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$

Exemple : on lance une fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire X = « valeur du dé ». Calculer la variance et l'écart-type de X.

On calcule l'espérance de X à partir de sa table de valeurs : $E(X) = \mu = 12{,}5$

X:

x	1	2	3	4
p	0,25	0,25	0,25	0,25

$E(X) = \mu = 0{,}25(1+2+3+4) = 2{,}5$

On va ensuite utiliser le théorème $V(X) = E(X^2) - \mu^2$. Il faut donc considérer la variable aléatoire X^2, dont on peut déterminer la table de valeurs :

X :	x	1^2	2^2	3^2	4^2
	p	0,25	0,25	0,25	0,25

puis calculer $E(X^2)$ =0,25($1^2+2^2+3^2+4^2$)=7,5, d'où $V(X)$ = 7,5 – $2,5^2$= 1,25

L'écart-type est égal à $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1{,}25}=\frac{\sqrt{5}}{2}\simeq 1{,}12$

Voir les exercices 27 à 34

5 [A savoir] Loi binomiale

Définition

Soit une expérience aléatoire à deux issues: échec (E) ou succès (S), avec p(S) = p et donc $p(E)$ = 1 - p, qu'on note aussi q. Une telle expérience est appelée **expérience de Bernouilli.**
On répète n fois cette même expérience, de façons indépendantes les unes des autres, et on s'intéresse au nombre de succès obtenus.
On considère donc la variable aléatoire X définie par X= "nombre de succès en n essais".
On dit que X suit une **loi binomiale** et on le note $X \sim B(n;p)$

Remarque : de très nombreuses expériences aléatoires peuvent être modélisées en ne considérant que deux issues possibles : A = « ce qui m'intéresse » et $\overline{A}$ = « ce qui ne m'intéresse pas ». Si on arrive à calculer $p(A)=p$, alors on a également $p(\overline{A})$ = 1 – p. Ce modèle d'expérience de Bernouilli puis de loi binomiale est donc très utile...

Exemple : on lance cinq fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire X = « nombre de 4 obtenus ». Quelle est la loi de X ?

On peut modéliser chaque lancer en ne considérant que deux issues possibles : A = « obtenir un 4 » et $\overline{A}$ = « ne pas obtenir un 4 ». On a : $p(A)$=0,25,et $p(\overline{A})$ = 0,75.

Comme les lancers sont indépendants, X suit une loi binomiale $X \sim B(5;0{,}25)$

Théorème

Si $X \sim B(n;p)$, alors on a : $p(X=k)=C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque : on note aussi souvent $C_k^n=\binom{n}{k}$ qui est appelé **coefficient binomial.**

Exemple : on lance cinq fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire X = « nombre de 4 obtenus ». Calculer $p(X=3)$.

On a vu dans l'exemple précédent que $X \sim B(5;0{,}25)$. Donc

$$p(X=3)=C_3^5 0{,}25^3 0{,}75^{5-3}=\frac{5!}{(5-3)!3!}0{,}25^3 0{,}75^2\simeq\ldots$$

6 [A savoir] Espérance et variance de la loi binomiale

Théorème

Si $X \sim B(n; p)$, alors on a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1\text{-}p)$

Exemple : on lance cinq fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on considère la variable aléatoire X = « nombre de 4 obtenus ». Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On a vu dans l'exemple précédent que $X \sim B(5; 0{,}25)$.

Donc $E(X) = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$ et $V(X) = 5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375$

7 [A savoir] Lois de Poisson

Définition

Lorsqu'un phénomène permet de supposer que :

- un seul événement arrive à la fois ;
- les événements sont indépendants ;
- le nombre d'événements se produisant pendant une période de temps ne dépend que de la durée de cette période ;

on dit que ce phénomène suit un **processus de Poisson**.

Formellement, si X est une variable aléatoire associée au nombre de fois qu'un tel événement rare se produit dans un intervalle donné, où LAMBDA indique le nombre moyen de réalisations dans l'intervalle en question, alors X suit une loi de Poisson donnée par

$$p(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque : La particularité de ces événements est qu'ils se produisent rarement.

Exemples : Le nombre d'accidents dans une entreprise en une semaine, le nombre de clients entrant dans une banque en un jour ou les fautes typographiques observées sur une page d'un livre sont des exemples de processus de Poisson.

Théorème

Si X suit une loi de Poisson, alors $E(X) = V(X) = n \cdot p$

Remarque : la loi de Poisson est utile pour des variables aléatoires dont on connaît la moyenne. En particulier, comme le paramètre λ est égal à l'espérance $E(X)$, les observations sur X permettent d'en donner une estimation.

Exemple : on constate que le nombre moyen d'arrivées de clients à un guichet est de 1,9 en 4 minutes. Calculer la probabilité d'observer 5 arrivées entre 10h00 et 10h04.

On peut modéliser avec une loi de Poisson de paramète λ = 1, 9 et on a :

$$p(X=5) = e^{-1.9} \cdot \frac{1.9^5}{5!} \simeq 0{,}0309 .$$

8 [A savoir] Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson

Sous certaines conditions, la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \cdot p$ est une très bonne approximation de la loi binomiale. En pratique , on montrre qu'on peut considérer cette approximation valable si n>=50 et $\lambda = n \cdot p \leq 10$.

Remarque : si n est grand et et p est petit, cette contrainte est satisfaite.

Exemple : un vaccin provoque chez un individu sur 800 environ une réaction dangereuse. On aimerait calculer la probabilité qu'en vaccinant 3000 personnes il y ait 3 réactions dangereuses.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre total de réactions dangereuses. X suit une loi binomiale : X TILDA B(3000; 1/800). On a donc :

$$p(X=3) = C_3^{3000} \left(\frac{1}{800}\right)^3 \left(1-\frac{1}{800}\right)^{3000-3} \simeq 0,20678$$

Ici, on a n = 3000 et $\lambda = n \cdot p$ = 3000 · 1/800 = 3,75. On peut donc approximer la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre λ = 3,75 :

$$p(X=3) = e^{-3,75} \cdot \frac{3,75^3}{3!} \simeq 0,20670$$

Voir les exercices 35 à 45

9 [A savoir] Lois continues

Définition

Une variable aléatoire **discrète** prend ses valeurs "par sauts"; elle admet ainsi un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Une variable aléatoire **continue** prend ses valeurs dans un intervalle ou dans $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour une variable aléatoire continue, la probabilité d'une unique issue est toujours nulle, on mesure la probabilité d'appartenir à un intervalle.
On appelle **fonction de densité**, ou **densité de probabilité**, une fonction réelle continue f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Remarque : la notation $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ signifie $\lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$

Si, de plus, on a, pour une variable aléatoire continue X : $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

alors f est la **fonction de densité de X**, ou la **densité de probabilité de X**.
On appelle **fonction de répartition de X associée à f** la fonction F définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Exemple : X suit une loi exponentielle de paramètre λ si $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{si } 0\leq x\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$.

Montrer que f est bien une fonction de densité et calculer $P(X<2)$ dans le cas où $\lambda=3$

f est continue (voir sa représentation graphique pour s'en convaincre) et $f(x)\geq 0$, car λ est positif et les fonctions exponentielles sont toujours strictement positives

remarque : on n'a pas utilisé les notations en « limites » pour alléger l'écriture.
Donc f est bien une fonction de densité.

Par ailleurs : $P(X<2)=\int_0^2 3e^{-3x}dx=-e^{-3x}\Big|_0^2=(-e^{-6})-(-e^0)=\frac{-1}{e^6}-(-1)=1-\frac{1}{e^6}$

Définition

Une variable aléatoire continue suit une **loi uniforme sur un intervalle *I*** si et seulement si la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans un sous intervalle de I est proportionnelle à la longueur du sous-intervalle.

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** sur $I=[0;3]$. Déterminer sa fonction de densité f et sa fonction de répartition F, puis calculer $P(2 < X < 3)$ et $P(X = 1)$.

f doit être constante sur [0;1] et nulle ailleurs, et on doit avoir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

on a donc $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, \text{si } 0\leq x\leq 3\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$

puis $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, \text{si } x<0\\ \int_0^x \frac{1}{3}dt, \text{si } 0\leq x\leq 3\\ 1, \text{si } x>3\end{cases}=\begin{cases}0, \text{si } x<0\\ \frac{1}{3}x, \text{si } 0\leq x\leq 3\\ 1, \text{si } x>3\end{cases}$

et enfin $P(2<X<3)=\int_2^3 \frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}$ et $P(X=1)=P(1\leq X\leq 1)=\int_1^1 \frac{1}{3}dt=0$

10 [A savoir] Espérance et variance d'une loi continue

Soit f une fonction de densité d'une variable aléatoire continue X.
On définit l'**espérance mathématique** de X (aussi notée μ) par $E(X)=\mu=\int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx$, la **variance** de X (aussi notée σ^2) par $V(X)=\int_{-\infty}^{-\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$ et l'**écart-type** de X par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire continue, alors on a : $V(X)=E(X^2)-\mu^2$

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant une **loi uniforme** sur I=[0;3]. Calculer l'espérance et la variance de X.

On a vu dans l'exemple précédent que $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, \text{si } 0\leq x\leq 3\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$.

Donc $E(X)=\mu=\int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx=\int_0^3 x\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}$

remarque : c'est naturel que la « moyenne » soit bien à 1,5, entre 0 et 3 !

$V(X)=\int_{-\infty}^{-\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_0^3 (x-1{,}5)^2\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\frac{(x-1{,}5)^3}{3}\Big|_0^3=\frac{1}{3}(\frac{1{,}5^3}{3}-\frac{(-1{,}5)^3}{3})=...=\frac{3}{2}$

Voir les exercices 44 à 45

11 [A savoir] Lois normales

Théorème

Les deux fonctions définies sur ℝ par $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $f_2(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ sont des fonctions de densité.

Définition

Une variable aléatoire continue X définie sur ℝ suit une **loi normale** (ou **loi de Laplace-Gauss**) de paramètres μ et σ ($\mu\in\mathbb{R}\, et\, \sigma\in\mathbb{R}_+^*$) si et seulement si sa densité de probabilité est donnée par la fonction réelle f définie par $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

On note alors $X\sim N(\mu;\sigma)$.

Si $\mu=0$ et $\sigma=1$, c'est-à-dire si $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, on parle de **loi normale centrée réduite** et on note $X\sim N(0;1)$.

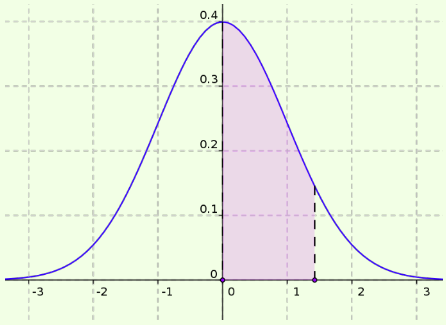
Remarque : pour calculer une probabilité dans le cas d'une loi normale, on est obligé d'utiliser une table numérique de valeurs ou une calculatrice.

Théorème

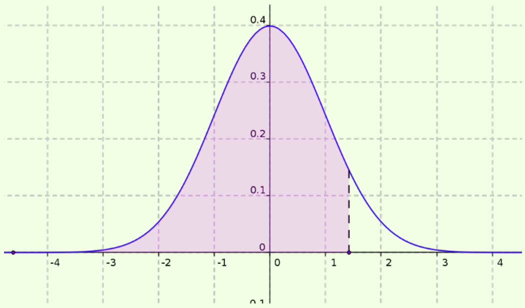
Si $Y\sim N(\mu;\sigma)$, alors on a : $E(X)=\mu$ et $Var(X)=\sigma$
Cas particulier : Si $Z\sim N(0;1)$, alors on a : $E(X)=0$ et $Var(X)=1$

Exemple : on considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $N(0\ ;1)$. Calculer $P(X\leq 1.42)$, $P(0\leq X\leq 1.42)$, $P(-1.37\leq X\leq 2.01)$ et $P(X\geq 1.13)$ et interpréter graphiquement les résultats.

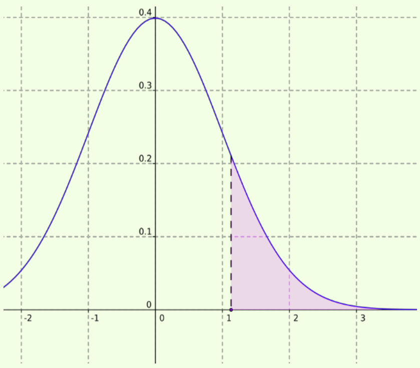
On utilise la table de la loi normale centrée réduite :



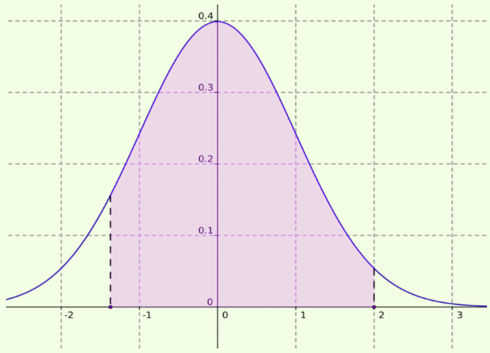
$P(0 \leq X \leq 1.42)$
$= P(X \leq 1.42) - 0.5 = 0{,}4222$



$P(X \leq 1.42) = 0{,}9222$

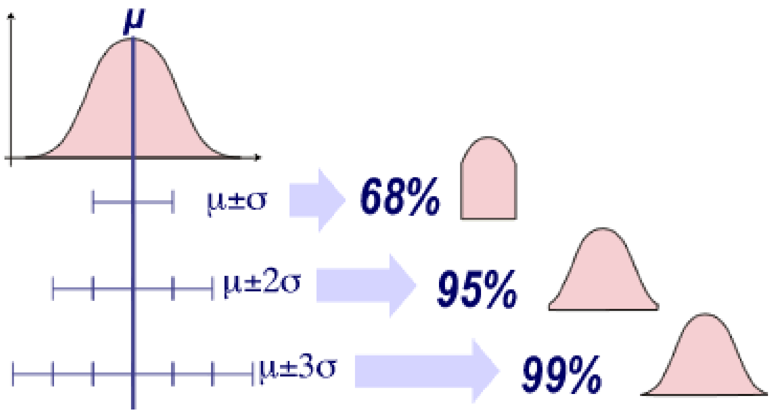


$P(X \geq 1.13) = 1 - P(X < 1.13)$
$= \ldots = 01292$



$P(-1.37 \leq X \leq 2.01)$
$= P(\leq X \leq 2.01) - [1 - P(\leq X \leq 1.37)\ ]$
$= \ldots = 0{,}8924$

Remarque : on peut dans le cas des lois normales interpréter graphiquement l'écart-type :



Voir les exercices 46 à 49

12 [A savoir] Approximer la loi binomiale par la loi normale

Théorème [sans démonstration]

Soit $X \sim B(n, p)$, dont la moyenne $E(X)$ est égale à np et l'écart-type et $\sigma(X)$ est égal à $\sqrt{np(1-p)}$. On définit $Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Alors la fonction de densité de Y approxime de façon très satisfaisante la loi de probabilité de $X \sim B(n, p)$.
C'est-à-dire que $P(a \leq X \leq b) \simeq P(a \leq Y \leq b)$.
On obtient une meilleure approximation encore avec

$$P(a \leq X \leq b) \simeq P(a-0{,}5 \leq Y \leq b+0{,}5) = P\left(\frac{a-0.5-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b+0.5-\mu}{\sigma}\right)$$

Remarque : on peut démontrer qu'on obtient une précision acceptable déjà pour *np*>5 et *nq*>5, où *q*=1-*p*.

Exemple 1 : on considère 10'000 chiffres (de 0 à 9) pris au hasard. Calculez la probabilité que le chiffre 3 apparaisse plus de 850 fois.

Soit X la variable « nombre de 3 » ; on sait que $X \sim B(10000 ; 0{,}1)$

on définit $Y \sim N(10000 \cdot 0{,}1 , \sqrt{10000 \cdot 0{,}1 \cdot 0.9}) \sim N(1000 ; 30)$

$P(X \geq 850) = P(Y \geq 850{,}5) \overset{calc}{\simeq} 1$ - le résultat donne une probabilité de presque 1 !

Exemple 2 : on effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont on sait que 2% sont défectueuses. On contrôle un lot de 1000 pièces. Calculer la probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses soit compris entre 18 et 22.

Soit X la variable « nombre de pièces défectueuses» ; on sait que $X \sim B(1000 ; 0{,}02)$

on définit $Y \sim N(1000 \cdot 0{,}02 ; \sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}) \sim N(20 ; \sqrt{18{,}4})$

$P(18 \leq X \leq 22) = P(17{,}5 \leq Y \leq 22{,}5) \overset{calc}{\simeq} 0{,}44$

Il y a environ 42,8 % de chances que le nombre de pièces défectueuses soit compris entre 18 et 22.

13 [Aller plus loin] Philosophie

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ♦ IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ♦
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

William Youden, statisticien (1900-1971)

Voir les exercices 50 à 57

Exercices d'entraînement

Combinatoire - probabilités

1 Une boîte contient sept billes distinctes. Combien y a-t-il de possibilités de prélever d'abord deux billes, puis trois billes et enfin deux billes ?

2 De combien de manières peut-on former un jury de trois hommes et deux femmes en choisissant parmi sept hommes et cinq femmes ?

3 Combien de plaques minéralogiques portant un matricule de sept caractères peut-on former si les trois premiers caractères sont des lettres et les quatre derniers des chiffres ? (Distinguer deux cas: avec répétition; sans répétition)

4 De combien de façons différentes trois garçons et deux filles peuvent-ils

a. s'asseoir sur un banc?

b. s'asseoir sur un banc si tous les garçons sont côte à côte, et les filles de même?

c. s'asseoir sur un banc si seules les filles s'assoient côte à côte ?

5 Parmi les dix participants d'un tournoi d'échecs, on compte quatre Russes, trois Américains, deux Anglais et un Appenzellois Rhodes intérieur. En supposant que dans le classement on ne puisse lire que la nationalité des joueurs, et non leur identité, combien y a-t-il de classements individuels possibles ?

6 On considère la devise latine Hoc opus, hic labor, qui ornait le frontispice de l'accademia de Vicenza et que l'on peut traduire par « toute oeuvre est le fruit d'un travail important ». Déterminer le nombre de devises différentes que l'on peut écrire (sans tenir compte du sens de la proposition obtenue) en permutant :

a. l'ensemble des lettres de cette devise

b. les lettres à l'intérieur de chaque mot

7

a. On répartit dix personnes en deux équipes A et B de cinq individus chacune. Combien y a-t-il de configurations possibles, sachant que l'équipe A sera placée dans le premier tournoi et l'équipe B dans le second ?

b. On répartit dix personnes en deux équipes de cinq individus. Combien y a-t-il de configurations possibles ?

c. On répartit dix personnes en deux équipes. Combien y a-t-il de configurations possibles?

8 12 copies d'un même livre doivent être déposées sur 3 rayons d'une bibliothèque. Les rayons sont situés les uns à côté des autres et donc séparés par deux parois. De combien de manières peut-on les arranger, sachant qu'aucun rayon ne doit rester vide ?

9 On suppose que A et B sont deux événements d'un univers donné tels que $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$ et $P(A\cap B)=0.1$.

Calculer :

a. $P(\overline{A})$

b. $P(A\cup B)$

c. $P(A\cap\overline{B})$

d. $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

10 Un appareil produit en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B. Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.
Un client achète un des appareils produits.

a. Calculer la probabilité pour que cet appareil ne présente aucun défaut.

b. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut A seulement.

c. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut B seulement.

11 On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes (4 couleurs avec 13 cartes chacune du 2 au 10 puis valet,dame, roi et as). Calculer la probabilité d'obtenir :

a. le roi de trèfle

b. un roi

c. un trèfle

d. un roi ou un trèfle

e. ni roi ni trèfle.

12 On lance deux fois un dé non pipé à 8 faces. On désigne par x le numéro obtenu sur le premier dé, par y le numéro obtenu sur le deuxième dé. Calculer la probabilité des événements :

a. $x = 4$

b. $y < 5$

c. $x = y$

d. $x < y$

e. $x = 1$ et $y = 2$

f. $x = 1$ ou $y = 2$

g. il sort un 3 et un 5

h. $x + y = 8$

Exercices d'entraînement

13 Une étude statistique portant sur l'absentéisme chez les élèves d'un collège a conduit aux résultats suivants :

- 25 % ont été absents au moins un jour (donc soit 1 jour, soit plus);
- 12 % ont été absents au moins deux jours (donc soit 2 jours, soit plus)
- 8 % ont été absents au moins trois jours (donc soit 3 jours, soit plus);
- 6 % ont été absents au moins quatre jours (donc soit 4 jours, soit plus);
- 5 % ont été absents au moins cinq jours (donc soit 5 jours, soit plus).

On choisit au hasard un élève de ce collège. Quelle est la probabilité qu'il ait été absent :

a. au moins un jour ?

b. jamais ?

c. exactement deux jours ?

d. moins de trois jours ?

e. deux ou trois jours ?page 116-117).

14 On considère une pièce de monnaie bien équilibrée.

a. On la jette en l'air. Cinq fois de suite, on obtient « pile ». Quelle est la probabilité d'obtenir encore pile au 6e jet ?

b. On la lance 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

c. On la lance 7 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

d. Quel est l'événement le plus probable :

A = « obtenir exactement un "pile" au cours de deux lancers »ou B = « obtenir exactement deux "piles" au cours de quatre lancers » ?

15 Supposons qu'il existe un test permettant de diagnostiquer une maladie et qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité pour que le test soit positif sur une personne malade est de 0,95 ;
- la probabilité pour que le test soit négatif sur une personne saine est de 0,95 .

Supposons de plus que 5 ‰ des personnes dans la population sont atteintes de cette maladie.

a. Calculer la probabilité pour qu'une personne qui a réagi positivement au test soit malade.

b. Calculer la probabilité pour qu'une personne qui a réagi négativement au test soit saine.

c. Identifier sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive et négative de ce test.

d. Que penser de ce test ?

16 Dans une ville imaginaire, 40 % de la population a les cheveux bruns, 25 % a les yeux bruns et 15 % les yeux et les cheveux bruns. On choisit au hasard une personne.

a. Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux bruns ?

b. Si elle a les yeux bruns, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?

c. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns ni les yeux bruns ?

d. « avoir les cheveux blonds » et « avoir les yeux bleus » sont-ils indépendants ?

Voir la théorie de 3e année

Variables aléatoires et espérance mathématique

17 Trouver l'espérance des variables aléatoires dont les distributions sont données ci-dessous :

a.

x	0	2	3	4	5	6
p	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2

b.

x	98	99	100	101
p	0.1	0.1	0.3	0.4

c.

x	1	2	3	...	n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

18 On dispose de 3 urnes. La première contient 4 boules blanches et 2 noires, la deuxième une noire et 2 blanches et la troisième 3 boules blanches. On tire une boule de l'urne 1 et on la remet dans l'urne 2. On tire ensuite une boule de l'urne 2 et la met dans l'urne 3. Finalement, on tire une boule de l'urne 3. Si la dernière boule tirée est noire, on gagne 1200.-, si elle est blanche, on perd 120.-. X désigne le gain. Calculer $E(X)$ et commenter.

19 Jeu américain: un joueur choisit un nombre entier entre 1 et 6. On jette 3 dés. Si le nombre choisi sort 1, 2 ou 3 fois, le joueur gagne 1, 2 ou 3 fois sa mise en plus de celle-ci. Sinon, il perd sa mise. Calculer l'espérance du gain.

20 Simon connaît un truc fameux pour gagner à coup sûr à la roulette (1 chance sur deux de gagner 2 fois sa mise). Il mise 1.-; s'il gagne, il s'arrête, sinon il double sa mise; s'il gagne, il s'arrête, sinon il double encore sa mise; etc...

a. Calculer l'espérance du gain de Simon:

i s'il n'a que 100.- en poche lorsqu'il se rend au casino

ii s'il dispose d'une somme illimitée

c. Mêmes questions en tenant compte des conditions réelles: 18 chances sur 37 de gagner 2 fois sa mise, 19 chances sur 37 de la perdre.

21 Jeu bête: il s'agit de faire passer une visite médicale à des millions de recrues en un temps le plus court possible avant de les envoyer en mission d'éducation urgente à l'autre bout du monde. 1% de la population du pays recruteur est atteinte d'une maladie que l'on peut déceler par analyse de sang. On envisage 2 méthodes d'examens:

- Examens individuels: une analyse par personne

- Examens groupés: on mélange les sangs de *n* personnes puis on fait une analyse.

Si les *n* personnes sont en bonne santé, une seule analyse à suffit; si l'une au moins est atteinte, il faut réexaminer chacun, et il aura fallu *n+1* analyses .

a. Calculer l'espérance mathématique du nombre X_n d'analyses nécessaires pour examiner un groupe de *n* personnes (X_n est fonction de *n*).

b. Déterminer le nombre *n* qu'il faut choisir afin que l'économie réalisée (par rapport à l'examen individuel) soit maximale et calculer, en %, cette économie.

22 Une origine historique de la notion d'espérance : « le problème des parties de Pascal ».
Deux personnes jouent une partie en plusieurs coups. A chaque coup, chaque personne a même probabilité de gagner le coup. Le premier qui a gagné trois coups ramasse l'enjeu qui est de 64 pistoles (chacun a déposé 32 pistoles au début du jeu). Les joueurs décident d'arrêter le jeu avant d'avoir terminé la partie. Supposons que le premier joueur ait gagné 2 coups et que le deuxième en ait gagné 1 au moment où ils décident de s'arrêter, comment doivent-ils partager l'enjeu?

23 On lance trois dés. Simon gagne si le total dépasse 10; sinon c'est Jean qui gagne. Le jeu est-il équitable ?

24 On répartit 10 boules au hasard dans 10 urnes et on note X le nombre d'urnes vides.

a. Poser $X_i = \begin{cases} 1, \text{si l'urne } i \text{ reste vide} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$ puis puis exprimer X en fonction des X_i

b. Calculer $E(X_i)$

c. En déduire $E(X)$ en utilisant les propriétés de l'espérance.

25 La loterie émet *n* billets, numérotés de 1 à *n* sur la partie gauche visible du billet. Les numéros 1 à *n* sont également répartis, aléatoirement, sur les parties droites cachées des billets. Le joueur achète un billet, gratte la partie droite. Si le nombre que apparaît est identique à celui du billet, il gagne 5 .-.Quelle est l'espérance du nombre de gagnants ?

26 Une certaine composante électrique tombe en panne avec probabilité 0,5. Pour limiter les risques, on en met n en parallèle. Une composante coûte 8.-, Une panne du système coûte 8192.-. Déterminer n de manière que l'espérance du coût total soit minimale.

Voir la théorie 1 à 2

Variance, écart-type et propriétés

27 Trouver la variance des variables aléatoires dont les distributions sont données:

a.

x_i	0	2	3	4	5	6
p_i	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2

b.

x_i	98	99	100	101
p_i	0,1	0,1	0,3	0,5

c.

x_i	1	2	3	...	n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

28 On lance deux dés. On appelle X et Y les résultats de chacun. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $E(X+Y)$, $E(2X)$, $V(X+Y)$ et $V(2X)$.

29 On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne une face ou 3 piles. X est le nombre de lancers nécessaires. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

30 Démontrer que si $X=\alpha$ est constante, alors $E(X)=\alpha$ et $V(X)=0$.

31 X est une variable aléatoire avec $V(X)=0$. Que peut-on dire de X ?

32 Démontrer que si α est constante et X est une v.a, alors $E(\alpha X)=\alpha E(X)$, $V(\alpha+X)=V(X)$ et $V(\alpha X)=\alpha^2 V(X)$.

33 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Démontrer que $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

34 On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé.

Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

a. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.

b. Comment appelle-t-on ce type de loi ?

c. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Voir la théorie 3 à 4

Loi binomiale

35 On jette 15 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. 7 fois un 5 ?

b. 9 fois un chiffre différent de 2 ?

c. 13 fois un chiffre différent de 2 ?

d. 4 fois un multiple de 3 ?

e. au moins 2 fois un 6 ?

36 Faire un **histogramme** de chacune des distributions binomiales suivantes:

a. $X \sim B\left(5;\frac{1}{2}\right)$

b. $X \sim B\left(10;\frac{1}{2}\right)$

c. $X \sim B\left(10;\frac{1}{6}\right)$

d. $X \sim B\left(10;\frac{5}{6}\right)$

37 On jette 100 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. 48 fois « pile » ?

b. 17 fois « face » ?

c. au moins 2 fois « pile » ?

38 Les jeunes citoyens d'un canton suisse sont considérés comme politiquement compétents si, après avoir interrogé 10 d'entre eux choisis au hasard, il s'avère que l'un au plus ne sait pas les noms de tous les conseillers d'Etat de son canton. Une délégation de jeunes du canton est envoyée à Berne.

Quelle est la probabilité qu'ils soient déclarés politiquement compétents si:

a. 95% des citoyens du canton connaissent tous leurs conseillers d'Etat ?

b. 70% des citoyens du canton connaissent tous leurs conseillers d'Etat ?

39 20% des citoyens d'une tranquille dictature sont, d'après une étude approfondie de la police politique de ce pays, des terroristes potentiels. La police politique emprisonne, par mesure préventive, 5 citoyens au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi eux:

a. exactement 1 terroriste potentiel ?

b. au moins un terroriste potentiel ?

Pour plus de sûreté, la police politique décide alors d'emprisonner 20 citoyens au hasard.

c. Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi eux exactement 4 terroristes potentiels ?

d. Même question avec au moins 4 terroristes potentiels ?

40 Grâce au travail efficace de sa police politique, un pays démocratique ne contient plus que 1% de terroristes. Combien faut-il emprisonner de citoyens pris au hasard pour être sûr 99% de détenir au moins un terroriste?

41 4 % des dossiers de crédit arrivent au service contentieux au bout d'un an après leur signature. Soit un lot de 50 dossiers. Modéliser ce problème par une loi de Poisson pour calculer la probabilité qu'aucun dossier ne devienne contentieux à un an.

42 On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

Quelle est la probabilité de trouver :

b. Aucun médecin ?

c. Entre 2 et 4 médecins ?

d. Au moins deux médecins ?

43 Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine n pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses. Pour n = 5 :

a. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Calculer son espérance et son écart-type

b. Quelle est la probabilité que deux pièces soient défectueuses

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

d. Déterminer la valeur de X la plus probable. Calculer la probabilité associée.

Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5%. Pour n = 100:

a. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifier votre réponse.

b. Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses.

c. Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.

d. Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4.

Voir la théorie 5 à 8

Lois continues

44 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ (cas général).

a. Déterminer la fonction de densité f de X.

b. Tracer la représentation graphique de f.

c. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer sa courbe représentative.

d. Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

45 Vrai ou faux ? Justifier

a. La densité de probabilité est toujours non-négative.

b. La fonction de répartition est toujours non-négative.

c. Si f est une fonction de densité et F la fonction de répartition associée, on a : $F' = f$

d. f est une primitive de F

e. F est la primitive de f déterminée par $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$

f. Si X ne prend ses valeurs que dans $[a;b]$, F est nulle pour $x \leq a$ et vaut 1 pour $x \geq b$.

g. $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$

Voir la théorie 9 à 10

Lois normales

46 Soit $Z \sim N(0;1)$.

a. Calculer à l'aide de la table numérique. :

i $P(Z \leq 1{,}17)$

ii $P(Z \leq 2{,}09)$

iii $P(Z \leq 5)$

iv $P(0{,}81 \leq Z \leq 1.94)$

v $P(0 \leq Z \leq 1{,}2)$

vi $P(Z \leq -1{,}38)$

vii $P(-0{,}68 \leq Z \leq 0)$

viii $P(-0{,}46 \leq Z \leq 2{,}21)$

b. Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ (dite courbe normale) comprise entre 0 et z soit égale à 0,3770.

c. Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ à droite de z soit égale à 0,0158.

d. Déterminer la valeur de z telle que l'aire sous la courbe de $f(z)$ comprise entre -1,5 et z soit égale à 0,0217.

47 Le diamètre intérieur moyen d'un échantillon de 200 corps de stylos produits par une machine est de 0,502 cm et l'écart-type moyen est de 0,005cm. Ne peuvent être acceptées pour des opérations automatiques de montage qui suivent que les pièces dont le diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm, les autres étant considérées comme défectueuses. On admettra que les diamètres des pièces peuvent être approximés par une distribution normale. Quel est alors le pourcentage de corps de stylos défectueux ?

48 Un marchand de chaussures sait que la pointure de sa clientèle masculine est distribuée à peu près normalement avec une moyenne de 42,4 et un écart-type de 1,3. Il veut fabriquer 5000 chaussures de pointure 39 à 46 (pointures entières uniquement). Combien doit-il fabriquer de chaque pointure (en admettant qu'on approxime une situation discrète par un modèle continu avec une loi normale) ?

49 Le poids moyen de 500 colis entreposés dans un certain hangar est de 151 kg et l'écart-type est 15 kg. On décide d'approximer cette situation discrète par un modèle continu avec une loi normale. Calculer le nombre de colis pesant :

a. entre 120 et 155 kg ;

b. plus de 185 kg.

Voir la théorie 11

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

50 Calculer la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 faces (inclusivement) au cours de 10 jets d'une pièce de monnaie en appliquant les lois de :

a. la distribution binomiale ;

b. l'approximation de la distribution binomiale par la distribution normale.

51 On lance une pièce 100 fois. Calculer la probabilité que le nombre de faces obtenu soit:

a. supérieur ou égal à 40.

b. compris entre 40 et 60.

52 Une pièce est lancée 500 fois. Quelle est la probabilité pour que le nombre de faces ne diffère de 250 que de :

a. plus de 10. **b.** plus de 30.

53 Un dé est jeté 120 fois. Quelle est la probabilité pour que le résultat 4 apparaisse :

a. 18 fois ou moins. [attention: ou moins ne signifie pas au moins !]

b. 14 fois ou moins.

54 Quelle est la probabilité que, sur n lancers d'un dé, le nombre de 6 s'écarte d'au moins 50 de son espérance mathématique si :

- $n = 6000$
- $n = 60000$

55 On lance 400 fois une pièce. X est le nombre de piles obtenu. Déterminer un intervalle, centré sur 200, tel que la probabilité d'observer X dans cet intervalle soit:

a. 0,9

b. 0,95

c. 0 ,99

d. 0 ,999

e. 0,9999

56 Une compagnie utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Une étude statistique montre que 5 passagers sur 100 ayant réservé ne se présentent pas à l'embarquement. On considérera ainsi que la probabilité qu'un passager ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement est de 0,05. La compagnie accepte 327 réservations sur un vol.

a. Calculer la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement soit inférieur ou égal à 320.

b. Estimer le le risque que la compagnie a pris en ayant accepté 327 réservations (overbooking).

c. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même vol 330 réservations ? 335 réservations ?

d. La compagnie accepte 337 réservation sur ce même vol d'une capacité de 320 passagers. Sachant que 310 personnes se sont déjà présentées à l'embarquement, quelle est la probabilité que moins de 320 personnes se présentent en tout à l'embarquement ?

57 A l'occasion d'un congrès international de collégiens sur le thème "quelle vie après la matu?", un hôtel de 192 lits est entièrement réservé. La direction accepte le risque d'un nombre de congressistes supérieur au nombre de lits, avec toutes les complications que cette situation peut entraîner, avec la probabilité 0,0228. L'expérience montre que 20% des réservations sont annulées. Combien peut-on accepter de réservations au maximum ?

Voir la théorie 12 à 13

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Source de nombreux ex. suppl : Serge Picchione (Collège Sismondi)

58 On considère les six lettres a, b, c, d, e et f. Combien de mots différents peut-on former :

a. avec les six lettres ?

b. avec quatre lettres ?

c. avec cinq des six lettres, en en répétant deux ?

59 De combien de manières peut-on partager 9 jouets entre 4 enfants, sachant que le plus jeune doit recevoir 3 jouets et les autres 2 jouets ?

60 Dans le canton de Genève, 960'000 immatriculations automobiles ont été délivrées. Les plaques sont numérotées de 1 à 960'000. Quelle est la probabilité en rencontrant au hasard une voiture que son numéro de plaque commence par 1 ? (réponse en %)

61 On propose à Pierre de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement symétriques de 10, 20 et 50 centimes respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile. Quelle probabilité a-t-il de gagner :

a. 20 centimes ?

b. moins de 50 centimes ?

c. plus de 20 centimes?

62 Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :

A0 : il n'y a pas eu de panne;

A1 : il y a eu une panne;

A2 : il y a eu deux pannes;

A3 : il y a eu plus de deux pannes.

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois.

Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type de tomber en panne dans l'année qui vient (réponse en %) :

a. moins de deux fois ?

b. au moins une fois ?

63 Dans un lot de 80 vaccins, 10 sont périmés. Si on en tire 2 au hasard, quelle est la probabilité en % :

a. de ne tirer aucun vaccin périmé ?

b. de tirer exactement vaccin périmé ?

c. de tirer 2 vaccins périmés ?

d. de tirer au moins un vaccin périmé ?

e. de tirer au plus un vaccin périmé?

64 On considère un jeu de 36 cartes «standard» et on tire 4 cartes Quelle est la probabilité d'obtenir (réponses sous forme de pourcentage) :

a. 4 piques ?

b. exactement 3 cœurs ?

c. au plus 1 as ?

d. aucune carte noire ?

e. exactement 2 cartes noires ?

f. au moins 1 cœur ?

g. exactement3 cartes d'une même famille ?

h. exactement un valet et deux rois ?

65 On considère un jeu de 52 cartes «standard». Les mains (ensemble de 5 cartes sans répétitions et sans ordre) possibles au poker sont équiprobables. Quelle est la probabilité de recevoir les mains suivantes dans l'ordre d'importance :

a. une quinte royale (10, V, D, R, A de la même famille) ?

b. une quinte flush (cinq cartes consécutives de la même famille, mais pas une quinte royale) ?

c. un carré (quatre cartes de même valeur) ?

d. un full (trois cartes dune valeur et deux d'une autre valeur) ?

e. un flush (cinq cartes de la même famille mais pas une quinte royale ou flush) ?

f. une quinte (cinq cartes consécutives de familles variées, mais pas une quinte royale ou flush) ?

g. un brelan (trois cartes de même valeur, mais pas un full) ?

h. une paire (deux cartes de même valeur) ?

i. deux paires ?

66 Un sac contient 20 jetons. La moitié d'entre eux sont noirs, les autres blancs. Un quart des jetons portent en plus une marque spéciale. Trois d'entre eux sont noirs. On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité en % que ce jeton :

a. soit noir et porte une marque ?

b. ne porte pas de marque ?

c. soit noir sachant qu'il porte une marque ?

d. ne porte pas de marque sachant qu'il est blanc ?

67 On jette un dé à 6 faces non truqué. Quelle est la probabilité que :

a. « 2 sorte » sachant qu'il s'agit « d'un nombre pair »

b. qu'un « nombre pair » sorte sachant qu'il s'agit de « 2 »

c. que « 2 ne sorte pas» sachant qu'il s'agit « d'un nombre pair »

68 On lance un dé non truqué à six faces et on note les événements suivants :

A : « le résultat est 4, 5 ou 6 » ;

B : « le résultat est un nombre pair ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

69

a. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge » sont indépendants.

b. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes auquel on a enlevé le roi de coeur (il reste donc 31 cartes). Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge » sont indépendants.

70 La table suivante donne la répartition de 150 élèves en formation en fonction de leur option spécifique principale d'enseignement et de leur intérêt marqué ou non pour les nouvelles technologies :

	OC Sport	OC Arts	OC Info
OS Langue	45	18	27
OS BC	33	9	18

On considère les événements suivants :
A : « avoir une OS BC »
B : « avoir une OS Langue »
B : « avoir une OS Langue »
D : « avoir une OC Arts »
E : « avoir une OC Informatique »

On choisit un élève au hasard.

a. Déterminer p(A), p(B), p(C), p(D) et p(E) ?

b. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

c. Les événements B et E sont-ils indépendants ?

71 Une boite contient un assortiment de chocolats noirs et de chocolats au lait. Certains chocolats contiennent de l'alcool, d'autres non. On choisit un chocolat au hasard dans cette boite.

On note :

A: l'événement "le chocolat choisi contient de l'alcool"

N: l'événement "le chocolat choisi est noir"

a. On sait que :

	noir	au lait	total
avec alcool	81	9	90
sans alcool	9	1	10
total	90	10	100

A et N sont-ils indépendants ?

b. On sait que :

	noir	au lait	total
avec alcool	81	9	90
sans alcool	9	2	11
total	90	11	101

A et N sont-ils indépendants ?

72 Une boîte contient 4 ampoules dont deux sont défectueuses. Les ampoules sont testées les unes après les autres jusqu'à ce que les 2 ampoules défectueuses soit trouvées. On ne remet pas dans la même boîte une ampoule testée.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de test nécessaire pour obtenir les deux ampoules défectueuses.

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Si une personne met 5 secondes pour faire le test d'une ampoule et qu'il vérifie 200 boîtes, combien de temps en minutes aura-t-il besoin en moyenne pour obtenir toutes les ampoules défectueuses ?

c. Si il n'y pas de chance, ou au contraire en a beaucoup, combien de minutes cela lui prendra-t-il ?

73 Dans une salle de jeux un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : ananas, bananes, cerises, dattes, fraises, groseilles, poires et raisins. Une mise de 1 chf déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie. Chacune des 4 roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces 8 fruits. On admettra l'équiprobabilité de tous les affichages.

a. Combien y a-t-il de possibilités de résultats différents ?

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :

E_1 = « On obtient 4 fruits identiques »

E_2 = « On obtient 3 fruits identiques »

E_3 = « On obtient 4 fruits distincts »

c. Certains résultats permettent de gagner de l'argent : 50 chf pour 4 fruits identiques, 5 chf pour 3 fruits identiques, 1 chf pour 4 fruits distincts et rien pour les autres résultats.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain du joueur.

i Quelle est la probabilité de l'évènement E_4 = « obtenir un gain nul » ?

ii Déterminer et interpréter l'espérance mathématique de X .

iii Ce jeu est-il vraiment « équitable » ?

74 Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique. L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0, 2 ; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0, 4 ; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0, 1.

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel. On note A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier », et B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,

a. Faire un arbre récapitulant cette situation.

b. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

c. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Pour chacune des personnes contactées, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue :

- 2 chf si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 chf si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 chf si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 chf si la personne s'abonne aux deux éditions.

d. On note X la somme perçue par le centre d'appel. Calculer $E(X)$.

e. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5000 lecteurs potentiels.

75 Sur la Plaine de Plainpalais, un forain propose le jeu suivant, pour 10 francs la partie : dix enveloppes sont placées dans une corbeille, dont une contient un carton vert, deux contiennent un carton rouge et sept contiennent un carton blanc. Le jeu consiste, après versement des 10 francs, à choisir une enveloppe au hasard dans la corbeille, à l'ouvrir et à regarder la couleur du carton.

Un carton vert donne droit à un gros lot, un carton rouge donne droit à un lot simple et un carton blanc donne droit à un lot de consolation.

Les lots simples reviennent à 8 francs au forain, alors que les lots de consolation ne lui reviennent qu'à 3 francs.

Soit X la variable aléatoire égale au bénéfice du forain sur une partie. Quel est le prix maximal auquel le forain peut acheter ses gros lots, s'il désire gagner en moyenne au moins 4 francs par partie ?

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

54

a. $6!=720$

b. $6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

c. $C_4^6\cdot4\cdot P_{5;2}=3600$

55 $C_3^9\cdot C_2^6\cdot C_2^4\cdot1=7560$

56 env. 10.42 %

57

a. 12.5 % **b.** 50 % **c.** 62.5 %

58

a. env. 69.6 % **b.** env. 70.1 %

59

a. env. 76.4% **d.** env. 23.6 %

b. env. 22.2% **e.** env. 98.6 %

c. env. 1.4 %

60

a. env. 0.214 % **e.** env. 39.7 %

b. env. 3.9 % **f.** env. 70.2 %

c. env. 94.7 % **g.** env. 15.4 %

d. env. 5.2 % **h.** env. 1.1 %

61

a. env. 0.00015 % **f.** env. 0.39 %

b. env. 0.0014 % **g.** env. 4.75 %

c. env. 0.024 % **h.** env. 42.3 %

d. env. 0.14 % **i.** env. 2.11 %

e. env. 0.2 %

62

a. p=15 % **c.** p=20 %

b. p=75 % **d.** p=80 %

63

a. p=33.3% **b.** p=1 **c.** p=2/3

64 dépendants

65

a. indépendants

b. dépendants

66

a. $p(A)=60/150$; $p(B)= 90/150$; $p(C)=78/150$; $p(D)=27/150$; $p(E)=45/150$

b. dépendants

c. indépendants

67

a. indépendants

b. dépendants

68

a. env. 2.67 tests

b. env. 44 minutes

69

a. $p(E_1)=\frac{8}{4096}$ $p(E_2)=\frac{224}{4096}$

$p(E_3)=\frac{1680}{4096}$

b.

i $p(E_4)=\frac{2184}{4096}$

ii) $E(X)$= - 0.22 représente le « gain moyen » du joueur par partie.

b. Dans ce cas le joueur perd environ 0,22 chf par partie en moyenne.

c. Ce jeu n'est pas équitable. Un jeu est équitable si $E(X)=0$ en moyenne, on ne gagne rien et on ne perd rien.

70

a.

b. $p(A\cap B)=8\%$

c. $p(B)=16\%$

d. $E(X)$=5,64 chf

e. Pour 5000 lecteurs, le centre d'appel peut tabler sur 28200 chf

71 Le prix ne doit pas dépasser 23 francs .

Bilan

« Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on peut la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue.»

David Hilbert, mathématicien allemand (1862-1943)

A savoir en fin de chapitre

Variable aléatoire et espérance mathématique

- ✔ variable aléatoire X ;
- ✔ distribution de X (ou fonction de probabilité ou loi de probabilité) ;
- ✔ espérance mathématique (moyenne) ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 17 à 26

Variance et écart-type

- ✔ indépendance de deux variables aléatoires ;
- ✔ propriétés de l'espérance ;
- ✔ variance et écart-type ; propriétés de la variance ;

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 27 à 34

Loi binomiale, loi de Poisson

- ✔ expérience de Bernouilli ; l
- ✔ loi binomiale ; coefficients binomiaux
- ✔ espérance et variance de la loi binomiale ;
- ✔ loi de Poisson ;

Voir la théorie 5 à 8 et les exercices 35 à 45

Variables aléatoires continues

- ✔ variable aléatoire discrète / continue ;
- ✔ fonction de densité (densité de probabilité) ;
- ✔ fonction de répartition ;
- ✔ loi uniforme sur un intervalle ;
- ✔ espérance et variance d'une loi continue ;

Voir la théorie 9 à 10 et les exercices 44 à 45

Lois normales

- ✔ loi normale ;
- ✔ loi normale centrée réduite ;
- ✔ centrer-réduire ;

Voir la théorie 11 et les exercices 46 à 49

- ✔ **Approximer la loi binomiale par la loi normale**
- ✔ approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 50 à 57

Quelques compléments en ligne

en particulier des vidéos explicatives ...

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-4e/complements/ch04