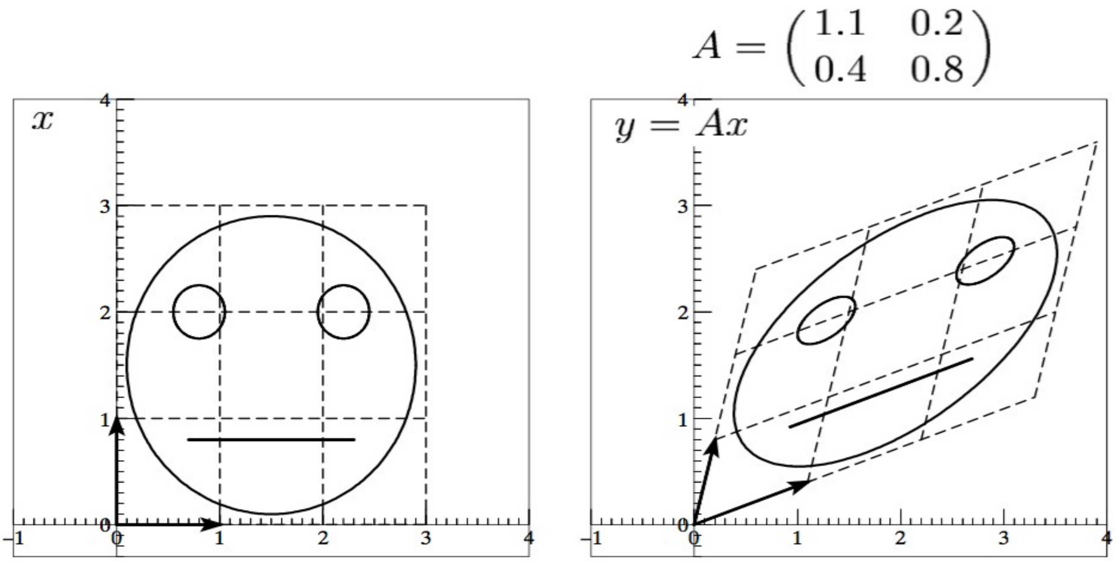
Chapitre 3 - Algèbre linéaire



G. Wanner - « Géométrie » - 2004 – Université de Genève

Problème

Admettons qu'une vache broute chaque jour la même quantité d’herbe. Considérons des champs pour lesquels la quantité d’herbe initiale par m² est toujours la même, et aussi que la quantité d’herbe qui pousse chaque jour par m² est toujours la même.
Dix vaches broutent toute l’herbe d’un champ de 1000m² en 10 jours, alors que quinze vaches broutent toute l’herbe d’un champ de 2200m² en 44 jours.
En combien de jours vingt vaches brouteraient-elles toute l’herbe d’un champ de 1700m² ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Problèmes introductifs

1. On cherche l'intersection des trois plans suivants dans l'espace :

i Π_1 contient les points A(1;2;5), B(-1;0;2) et C(3;2;-3)

ii Π_2 est orthogonal à Π_1 et contient les points D(1;-3;0) et E(1;1;1)

iii Π_3 contient la droite d d'équations $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=z-3$ et le point F(0;1;4)

a. Poser le système d'équation qui permet de modéliser ce problème.

b. Que savez-vous sur la façon de résoudre ce type de système ?

2. Utilisons GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/fr) pour explorer comment appliquer des transformations du plan à une figure donnée...

a. Quelles sont les transformations du plan que vous connaissez ?

b. Comment les manipuler efficacement...

3. Nous allons construire de nouveaux outils mathématiques qui nous permettons de rendre plus efficace la façon de traiter ces deux types de problèmes.

2 [Activité] Matrices

1. On considère la définition suivante :

Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Une **matrice à *m* lignes et *n* colonnes** (à coefficients réels) est un tableau de nombres de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij}\in\mathbb{R}, \forall i\in\{1;2;\dots;m\}$ et $j\in\{1;2;\dots;n\}$

Illustrer avec des exemples

2. Comment définir les notions suivantes : une matrice carrée ? Une matrice diagonale ? Une matrice triangulaire ? Donner des exemples.

3. Comment définir l'égalité de deux matrices ? Donner des exemples.

3 [Activité] Deux premières opérations avec les matrices

1. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comment définir les opérations qui permettent de calculer $A + B$, $2A$ ou encore ,-$3A + 2B$?

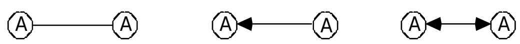
2. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Que penser de $A+ C$?

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

4 [Activité] Applications du calcul matriciel

A quoi peuvent bien servir les matrices ?

Un **réseau** est constitué d'un ensemble de **nœuds** et d'un ensemble de **chemins** qui assurent la liaison entre les nœuds. Les nœuds peuvent représenter des villes, des intersections de routes, des ordinateurs, des réservoirs d'eau, ou des délais dans un projet. Les nœuds représentent donc des points où un flux prend son origine, se termine ou se trouve relayé. Les chemins peuvent représenter des routes, des voies aériennes, des lignes à haute tension, des oléoducs etc. Ci-dessous sont illustrées différentes représentations de nœuds et de chemins.

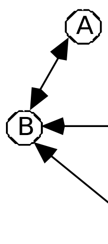


1 2 3

Dans le cas 1 il s'agit d'un **chemin non-orienté**.

Dans le cas 2 il s'agit d'un **chemin orienté**.

Dans le cas 3 il s'agit d'un **chemin bi-orienté**.



Ci-contre se trouve un exemple de nœuds et de chemins représentant les voies aériennes empruntées par une compagnie d'aviation locale desservant quatre villes A, B, C et D :

Les nœuds représentent les villes et les chemins les voies aériennes.

Le chemin bidirectionnel qui relie les nœuds A et B indique que la compagnie assure les vols de A vers B mais également de B vers A.

L'essentiel de ces relations peut être représenté par une matrice.

Chaque ligne et colonne de la matrice représente les nœuds du réseau. Les éléments de la matrice sont représentés par des 0 ou des 1 en fonction des chemins qui relient les nœuds Explicitement l'élément dans la position ij se verra assigné le nombre 1 si une liaison aérienne est assuré entre la ville i et la ville j, sinon on lui assignera le nombre 0.

La matrice ci-contre représente tous les vols directs entre les villes desservies par la compagnie aérienne ; elle est de dimension 4x4;

$$\text{de}\quad \begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array} \begin{array}{c} \text{à} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

en la multipliant par elle-même d'une certaine façon, on obtient une matrice qui résume le nombre de vols à une escale entre toutes les villes ...

On obtient le résultat suivant:

$$\text{de}\quad \begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array} \begin{array}{c} \text{à} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Vérifier sur les schémas ci-dessus si les résultats sont cohérents.

b. Et si on multipliait ce résultat encore une fois par la matrice M, comment pourrait-on interpréter les résultats obtenus ?

5 [Activité] Multiplier deux matrices

1. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ -3 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a. Comment définir l'opération qui permet de calculer AB ?

b. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :

i BA	iv DB	vii DI	x AC	xiii CB
ii AB	v OA	viii I^3	xi CA	xiv $OIBDBDD$
iii BD	vi AO	ix DIB	xii I^{2345}	

c. La multiplication des matrices est-elle commutative ? Associative ? Conjecturer et justifier.

d. La calculatrice peut manipuler des matrices ... Elle est en particulier très utile pour les multiplications ! Explorer ces possibilités.

2. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a. Calculer $AB+AC$ et $A(B+C)$. Qu'en déduire ?

b. Ssoit A et B sont deux matrices 2x2. Que penser des formules suivants :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(AB)^2 = A^2\,B^2$ et $A\cdot B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 11

6 [Activité] Problème

On souhaite déterminer la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ qui passe par les trois points A=(5;102.5), B=(10;190) et C=(20;40).

a. Poser ce problème en terme de calcul matriciel.

b. A quel problème est-on confronté ? Faire le lien avec le début du chapitre ...

7 [Activité] Inverse et déterminant 2x2

1. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le **déterminant d'une matrice carrée 2x2** est le nombre $det(A)=ad-bc$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Déterminer les déterminant suivants :

i $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

2. L'**inverse d'une matrice carrée *A*** est la matrice A^{-1} telle que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

a. Théorème :

- Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

b. Démontrer et illustrer.

c. Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes :

i $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

ii $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. **Propriétés de l'inverse d'une matrice**

a. Théorème :

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (attention à la permutation des matrices!)
- Soit A une matrice inversible et soit l'équation matricielle $AB = AC$, alors $B=C$.

Démontrer et illustrer.

b. Application des déterminants à la résolution de systèmes

Soit le système 2x2 suivant : $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$. Monter qu'on peut l'écrire sous forme matricielle puis le résoudre directement à l'aide du calcul matriciel.

8 [Aller plus loin] Déterminant et inverse 3x3

1. La **transposée d'une matrice carrée** $A=(a_{ij})_{nxn}$ est la matrice $A^t=(a_{ji})_{nxn}$, c'est-à-dire qu'on inverse les positions des lignes et des colonnes. Déterminer les transposées suivantes :

i $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^t$

ii $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^t$

2. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

Le **déterminant d'une matrice carrée 3x3** est le nombre

$det(A)=a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

3. Déterminer les déterminant suivants :

i $\begin{vmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

4. On considère le théorème suivant :

Théorème :

☐ Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors on obtient A^{-1} ainsi:

i on calcule $det(A)$;

ii on calcule la **matrice des cofacteurs** $B=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

cette matrice est obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} par la valeur du déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j, puis en corrigeant les signes en multipliant par $(-1)^{i+j}$;

iii on prend sa transposée B^t ;

iv on obtient enfin l'**inverse de la matrice 3x3** : $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot B^t$.

☐ Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

5. Déterminer les inverses des matrices :

i $\begin{vmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ ii $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

6. Résoudre le problème de l'activité 6 avec ces outils.

7. Résoudre le problème initial du chapitre (activité 1.1) avec ces outils.

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 12 à 17

9 [Activité] Transformations du plan

Nous connaissons la notion de fonction réelle, qui à tout nombre réel associe au plus un nombre réel. Une **application** est un cas particulier de fonction, dans lequel à tout nombre réel on associe exactement un nombre réel. Donner quelques exemples de fonctions et d'applications pour se rafraîchir la mémoire...

On peut étendre ce concept et définir des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Cela signifie qu'à tout point du plan on associe exactement un point du plan. Considérons les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

a. $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F_1(x;y)=(x^2;y^2)$

b. $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F_2(x;y)=(x-2;y+3)$

c. $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F_3(x;y)=(3xy;1)$

On appelle ces applications des **transformations du plan**.

Il est difficile de manipuler ces applications, en particulier de les représenter graphiquement...

Pour mieux les visualiser, on procède souvent de la façon suivante : on construit une figure dans le plan et on fait agir l'application de telle sorte à voir l'effet que celle-ci produit sur cette figure...

Utiliser GeoGebra pour explorer ces trois applications.

10 [Activité] Relation avec les vecteurs du plan

On peut considérer les éléments du plan soit comme des points, soit comme des vecteurs, puisque nous savons qu'il y a une correspondance un-à-un (une bijection) entre ces deux façon de voir :

- à tout point $P = (x;y)$ du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$;
- à tout vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ du plan, on associe le point $P=(v_1;v_2)$.

Illustrer par des exemples, en particulier ceux de l'activité précédente.

11 [Activité] Transformations particulières

1. Une **translation** T **:** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$.

a. Elle agit la façon suivante : $P'=T(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\vec{t}$.

b. En composantes : $\overrightarrow{OP'}=T(\overrightarrow{OP})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p'_1\\p'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1+t_1\\p_2+t_2\end{pmatrix}$

c. En coordonnées : $P'=T(P)\Leftrightarrow(p'_1;p'_2)=(p_1+t_1;\,p_2+t_2)$

d. Illustrer avec des exemples et des schémas.

2. Une **homothétie** H **:** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un centre d'homothétie $C(c_1;c_2)$ et d'un rapport d'homothétie r.

a. Elle agit de la façon suivante : $P'=H(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OC}+r\cdot\overrightarrow{CP}$

b. Cas particulier où $C(0;0)$: $P'=H(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP'}=r\cdot\overrightarrow{CP}$

i En composantes : $\overrightarrow{OP'}=H(\overrightarrow{OP})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p'_1\\p'_2\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot p_1\\r\cdot p_2\end{pmatrix}$

ii En coordonnées : $P'=H(P)\Leftrightarrow(p'_1;p'_2)=(r\cdot p_1;r\cdot p_2)$

c. Illustrer avec des exemples et des schémas.

3. Une **rotation** R **:** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un centre de rotation $C(c_1;c_2)$ et d'un angle orienté α .

a. Elle agit de la façon suivante : $P'=R(P)\Leftrightarrow\|\overrightarrow{CP'}\|=\|\overrightarrow{CP}\|$, où l'angle orienté $\widehat{P'CP}$ - c'est-à-dire l'angle ont le signe est défini par le sens trigonométrique – vaut α

b. Cas particulier où $C(0;0)$:

i $\overrightarrow{OP'}=R(\overrightarrow{OP})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p'_1\\p'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)p_1-\sin(\alpha)p_2\\\sin(\alpha)p_1+\cos(\alpha)p_2\end{pmatrix}$

ii $(p'_1;p'_2)=R((p_1;p_2))\Leftrightarrow$ $(p'_1;p'_2)=(\cos(\alpha)p_1-\sin(\alpha)p_2;\sin(\alpha)p_1+\cos(\alpha)p_2)$

c. Illustrer avec des exemples et des schémas.

4. Une **symétrie (axiale)** S **:** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'une droite d, appelée axe de symétrie.

a. Elle agit de la façon suivante : $P'=S(P)\Leftrightarrow$ d est la médiatrice du segment $[PP']$

b. Illustrer avec des exemples et des schémas.

5. Une **projection** (orthogonale) Pr : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'une droite d.

a. Elle agit de la façon suivante : $P'=Pr(P)\Leftrightarrow$ P' est l'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par P.

b. Illustrer avec des exemples et des schémas.

12 [Aller plus loin] Cas généraux des homothéties et rotations

1. Une homothétie H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par la donnée d'un centre d'homothétie $C(c_1;c_2)$ et d'un rapport d'homothétie r agit :

a. En composantes : $\overrightarrow{OP'}=H(\overrightarrow{OP})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p'_1\\p'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}p_1-c_1\\p_2-c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+r\cdot(p_1-c_1)\\c_2+r\cdot(p_2-c_2)\end{pmatrix}$

b. En coordonnées : $P'=H(P)\Leftrightarrow(p'_1;p'_2)=(c_1+r\cdot(p_1-c_1);c_2+r\cdot(p_2-c_2))$

c. Illustrer avec des exemples et des schémas.

2. Une rotation R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par la donnée d'un centre de rotation $C(c_1;c_2)$ et d'un angle orienté α agit :

a. En composantes : $\overrightarrow{OP'}=R(\overrightarrow{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1+\cos(\alpha)(p_1-c_1)-\sin(\alpha)(p_2-c_2) \\ c_2+\sin(\alpha)(p_1-c_1)+\cos(\alpha)(p_2-c_2) \end{pmatrix}$

b. En coordonnées :

$$P'=R(P) \Leftrightarrow (p'_1;p'_2)$$
$$=(c_1+\cos(\alpha)(p_1-c_1)-\sin(\alpha)(p_2-c_2);c_2+\sin(\alpha)(p_1-c_1)+\cos(\alpha)(p_2-c_2))$$

c. Illustrer avec des exemples et des schémas.

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 18 à 21

13 [Activité] Applications linéaires

1. Une **application linéaire** L **:** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application qui vérifie les propriétés suivantes :

☐ $L(\vec{v}+\vec{w})=L(\vec{v})+L(\vec{w})$, pour tous vecteurs $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ et $\vec{w}\in\mathbb{R}^2$

☐ $L(\alpha\cdot\vec{v})=\alpha\cdot L(\vec{v})$, pour tout vecteur $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ et tout scalaire $\alpha\in\mathbb{R}$

Remarque : cette définition est équivalente à définir une application linéaire comme vérifiant

$$L(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha L(\vec{v})+\beta L(\vec{w}), \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ et } \forall\, \vec{v} \text{ et } \vec{w}\in\mathbb{R}^2 .$$

2. Soients les application S, F et T de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$,

$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} xy \\ x-1 \end{pmatrix}$ et $T(\vec{v})=\vec{v}+\vec{t}$, où $\vec{t}$ est un vecteur non nul donné.

a. Ces applications sont-elles linéaires ?

b. Ces applications sont-elles l'une de celles que nous avons étudiées au paragraphe précédent ?

3. Considérons le théorème : « Si L est une application linéaire, alors $L(\vec{O})=\vec{O}$ »

a. Le démontrer.

b. Enoncer sa contraposée et en déduire comment déterminer facilement qu'une application n'est pas linéaire.

c. Revoir les applications du point 2. pour utiliser cette contraposée lorsque cela est pertinent.

4. La conjecture ci-dessous est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Conjecture : Si L : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire, alors $L(-\vec{v})=-L(\vec{v}), \forall \vec{v}\in\mathbb{R}^2$

5. Les transformations du plan que nous avons étudiées jusque-là sont-elles linéaires ?

14 [Activité] Une propriété fondamentale

1. La **base canonique** de $\mathbb{R}^2$ est formée des deux vecteurs : $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Expliquer pourquoi on parle de « base » et de base « canonique ».

2. On considère l'application linéaire L : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{-1}\end{pmatrix}$. Montrer qu'à partir de ces informations, on peut calculer $L\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et même déterminer $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

3. Enoncer le théorème «Une application linéaire est entièrement déterminée par deux images (des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$) »

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer ce théorème.

4. On peut souvent également entièrement déterminer une application linéaire en connaissant deux autres images ; par exemple, considérons l'application linéaire L : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $L\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

a. Déterminer $L(\vec{i})$ et $L(\vec{j})$

b. Utiliser le résultat de **a.** pour calculer $L\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et justifier pourquoi ils sont cohérents avec les données de l'exercice.

15 [Activité] Matrice d'une application linéaire

1. Enoncer le théorème « Matrice d'un application linéaire». La matrice $M_L=\begin{pmatrix}i_1 & j_1\\i_2 & j_2\end{pmatrix}$ est appelée **matrice de L (relativement à la base canonique)**.

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer ce théorème.

2. Reprendre l'application linéaire L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice M_L de L.

b. Montrer comment on peut calculer $L\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et déterminer $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à partir de cette matrice.

c. Démontrer ce théorème.

3. Soit l'application linéaire de matrice $M=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le vecteur $\vec{u}$ qui est image de $\vec{v}$ par *M*.

b. Déterminer le vecteur $\vec{w}$ qui a pour image $\vec{v}$.

Voir la théorie 9 à 14 et les exercices 22 à 37

16 [Activité] Composition

1. Soit L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-4y \end{pmatrix}$ et $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$ Déterminer la **composition** $F \circ L$ sans utiliser les matrices associées puis en en utilisant les matrices associées.

2. Déduire du point précédent un théorème sur la composition d'applications linéaires.

3. Soient M_α et M_β , les matrices des rotations autour de l'origine d'angles α et β respectivement. Calculer le produit $M_\beta \cdot M_\alpha$ et utiliser le résultat obtenu pour retrouver les formules trigonométriques d'addition des arcs : $\sin(\alpha+\beta)=\ldots$, $\cos(\alpha+\beta)=\ldots$.

4. Décrire la composée de deux homothéties de coefficients *r* et *s* et de centre O(0;0).

5. Soit S la symétrie par rapport à une droite de pente positive qui passe par l'origine et qui forme un angle de 60◦ avec l'axe Ox et R une rotation de 60° autour de l'origine (dans le sens trigonométrique).

a. Déterminer les matrices M_S et M_R associées aux deux applications linéaires (dans la base canonique).

b. Déterminer la matrice associée à la composition $S \circ R$ des deux applications linéaires (dans la base canonique).

c. Décrire géométriquement l'application linéaire associée à $S \circ R$, en justifiant soigneusement la réponse.

17 [Activité] Réciproque

1. Conjecture : Toute application linéaire est **bijective**. Vrai ou faux ? Justifier.

2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire bijective, c'est-à-dire tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est image par L d'un et d'un seul vecteur de $\mathbb{R}^2$, et soit $M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base canonique. Nous savons que l'application **réciproque** L^{-1} de L existe ; par définition, on a :

$L^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Enoncer une conjecture à propos de la matrice de L^{-1}.

3. Soit les applications linéaires définies par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+5y \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$ Déterminer leurs réciproques si cela est possible.

4. Soit $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice est $M_G=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice M_G est inversible.

b. Calculer l'image $G^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, où G^{-1} est la réciproque de G.

c. Déterminer un vecteur non nul $\vec{u}$ tel que $G(\vec{u})=3\vec{u}$.

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 38 à 52

18 [Aller plus loin] Dans l'espace

Déterminer les matrices des transformations linéaires suivantes dans l'espace :

a. La projection sur le plan Oyz

b. La symétrie par rapport au plan Oxz

c. L'homothétie de centre O et de rapport k

d. La rotation d'angle α autour de l'axe Oz

1 [A savoir] Matrices

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice à m lignes et n colonnes** (à coefficients réels) est un tableau de nombres de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1;2;\dots;m\}$ et $j \in \{1;2;\dots;n\}$

Exemples

- ☐ $M_{3x4}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 4 & \sqrt{2} & 0 & -2,3 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes ;
- ☐ $A_{2x2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes ; on parle alors de **matrice 2x2** et on notera souvent plus simplement $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, le nombre de lignes et de colonnes étant directement visible dans la matrice ;
- ☐ $B_{3x3}=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes : une **matrice 3x3.**
- ☐ un vecteur du plan $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une **matrice 2x1**;
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice ;
- ☐ les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) sont des matrices 2x2 (resp. 3x3).

Exemple littéral

$M_{2x3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes (avec les $a_{ij} \in \mathbb{R}$, quel que soient $i \in \{1;2\}$ et $j \in \{1;2;3\}$.

Remarque:

Le double indice ij indique dans l'ordre le numéro de la ligne et le numéro de la colonne; plus explicitement, i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de la position de l'élément a_{ij} ; chaque position doit être occupée par un nombre réel, sinon on ne parlera pas de matrice (à coefficients réels) ; « il n'y a pas de trous »!

Notation et vocabulaire

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ une matrice mxn. On la note parfois de façon raccourcie $A=(a_{ij})_{mxn}$, qui signifie que $i\in\{1;2;...;m\}$ et $j\in\{1;2;...;n\}$.

Une matrice nxn (même nombre de lignes que de colonnes) est appelée **matrice carrée**; n est **l'ordre** de la matrice carrée.

Exemples

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

$B=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Une matrice carrée A est dite **diagonale** si et seulement si les seuls éléments non nuls se trouvent dans la diagonale.

Exemple

$C=\begin{pmatrix} 234 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Une matrice carrée B est dite **symétrique** si et seulement si $(a_{ij})=(a_{ji})$, pour tous $i\in\{1;2;...;m\}$ et . $j\in\{1;2;...;n\}$

Exemple

$E=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \\ -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix} 0.2 & 3 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont des matrices symétriques.

Une matrice carrée est dite **triangulaire** si et seulement si tous les éléments situés au dessus de la diagonale ou si tous les éléments situés au dessous de la diagonale sont nuls.

Exemple

$G=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Une matrice carrée A est **nulle** si et seulement si tous les éléments sont nuls. On écrit $A=0$.

Exemple

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle

Définition

Soient $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ deux matrices mxn .

$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$ pour tous $i\in\{1;2;...;m\}$ et $j\in\{1;2;...;n\}$

Autrement dit : **deux matrices sont égales** si elles ont la même structure (mxn) et si les éléments situés aux mêmes places sont égaux 2 à 2.

Exemple

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices égales alors que $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

2 [A savoir] Opérations avec les matrices

Définition « Addition de deux matrices *mxn* »

On définit ainsi l'**addition de deux matrices** A_{mxn} et B_{mxn} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : on additionne les éléments situés à la même position.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$.

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2 & 3+(-4) \\ (-6)+3 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- ☐ on ne peut additionner que des matrices ayant la même structure ;
- ☐ si A et B sont des matrices mxn, alors $A+B$ est aussi une matrice mxn ;
- ☐ La matrice qui ne contient que des zéros est appelée **matrice nulle** ;
- ☐ si A et B sont des matrices mxn, alors $A+B$ est aussi une matrice mxn.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A+B$ n'est pas définie.

Définition «Multiplication d'une matrice mxn par un scalaire »

On définit ainsi la **multiplication d'une matrice A_{mxn} par un scalaire α** :

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \dots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : on multiple par α tous les éléments de la matrice.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha=-3$. Calculer $\alpha\cdot A$.

$$\alpha\cdot A=(-3)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3)\cdot 4 & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-6) & (-3)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : si A est une matrice mxn, alors $\alpha\cdot A$ est aussi une matrice mxn.

Voir les exercices 1 à 3

3 [A savoir] Multiplication de matrices

Définition « Multiplication d'une matrice mxn par une matrice nxp »

On définit ainsi la **multiplication des matrices** A_{mxn} et B_{nxp} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & b_{2j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

où c_{ij} s'obtient ainsi : $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\dots+a_{in}\cdot b_{nj}$, c'est-à-dire en multipliant la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

$$AB=A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot(-4)+3\cdot 0 \\ (-6)\cdot 2+2\cdot 1 & (-6)\cdot(-4)+2\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -16 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Remarques :

☐ les raisons de cette définition complexe apparaîtront plus clairement dans le chapitre sur la composition d'applications linéaires.

☐ on ne peut procéder ainsi que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de ligne de la seconde ; en général $A_{mxn} \cdot B_{kxp}$ n'est pas défini, seul $A_{mxn} \cdot B_{nxp}$;

☐ lorsqu'une telle multiplication peut se faire, le résultat est une matrice mxp, c'est-à-dire que son nombre de ligne est égal à celui de la première matrice et son nombre de colonnes à celui de la seconde ;

☐ cette opération n'est pas commutative, c'est-à-dire que $A_{mxn} \cdot B_{nxp} \neq B_{nxp} \cdot A_{mxn}$ puisqu'en général $B_{nxp} \cdot A_{mxn}$ n'est pas défini : ! Par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui sont deux matrices différentes ;

☐ $A \cdot B = 0$ n'implique pas forcément que $A = 0$ ou $B = 0$: par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

☐ $A \cdot B = A \cdot C$ n'implique pas forcément que $B = C$: par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

☐ on peut démontrer – c'est fastidieux ! - que la multiplication des matrices est associative, c'est-à-dire que $(A_{mxn} \cdot B_{nxp}) \cdot C_{pxq} = A_{mxn} \cdot (B_{nxp} \cdot C_{pxq})$;

☐ ces matrices carrées $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, etc... sont appelées **matrices identité** ; lorsqu'on multiplie une matrice A par une matrice identité, on obtient A.

Voir les exercices 4 à 11

4 [A savoir] Déterminants et inverses 2x2

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Son **déterminant** est le nombre $det(A) = ad - bc$. On note : $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple : déterminer les déterminants des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

$det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot3-0\cdot2=3$ et $det(B)=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-8)-4\cdot6=0$

Définition

L'**inverse d'une matrice carrée A** est la matrice A^{-1} telle que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Théorème

Soit $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Soit $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

Exemple : déterminer les inverses des matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{pmatrix}$ puis vérifier que le résultat est correct en utilisant la définition de l'inverse

$A^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot3-0\cdot2}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et B^{-1} n'existe pas car $det(B)=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{1}{3}\\ 0\cdot1+3\cdot0 & 0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ et

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot0 & 1\cdot2+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot3\\ 0\cdot1+\frac{1}{3}\cdot0 & 0\cdot2+\frac{1}{3}\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$, donc A^{-1} est correcte.

Théorème « Propriétés de l'inverse d'une matrice »

- ☐ $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
- ☐ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (attention à la permutation des matrices!)
- ☐ Soit A une matrice inversible et soit l'équation matricielle $AB = AC$, alors $B=C$.

Remarque : ce théorème est valable aussi bien pour les matrices 2x2 que 3x3 (et même plus!).

Méthode «Résoudre un système 2x2 avec le calcul matriciel »

1. on écrit le système sous forme matricielle $AX = B$
2. on calcule l'inverse de la matrice A
3. on multiple le système (par la gauche) par A^{-1} pour obtenir $X = A^{-1}B$
4. on obtient la réponse !

Exemple : résoudre le système 2x2 suivant à l'aide du calcul matriciel: $\begin{cases}-2x+3y=0\\ x-y=4\end{cases}$.

On écrit $\begin{cases}-2x+3y=0\\ x-y=4\end{cases}$ sous forme matricielle :

on construit les matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}$, où A est la matrice des coefficients (en lignes), S celle des variables (en colonnes) et B celle des termes libres (en colonnes) puis on écrit le système comme $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}$, soit $AS=B$.

Comme on cherche S, on peut aussi écrire

$$AS=B \Leftrightarrow A^{-1}(AS)=A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)S=A^{-1}B \Leftrightarrow S=A^{-1}B$$

attention : il faut bien multiplier à gauche et non à droite ... l'opération n'est pas commutative !

il faut donc d'abord déterminer A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{(-2)\cdot(-1)-3\cdot 1}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

et donc $S=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+3\cdot 4\\ 1\cdot 0+2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\ 8\end{pmatrix}$

les deux nombres cherchés sont $x=12$ et $y=8$

Remarque : on peut formaliser cette démarche pour en tirer des formules qui permettent d'utiliser les déterminant pour résoudre des systèmes d'équations ; ce sont les règles de Cramer (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_Cramer pour les détails...)

Gabriel Cramer, né le 31 juillet 1704 à Genève et mort le 4 janvier 1752, était un professeur de mathématiques et de philosophie à Genève, ami de Jean Bernoulli. Une rue porte son nom dans le quartier de la Servette.

5 [Aller plus loin] Déterminants et inverses 3x3

Définition

La **transposée d'une matrice carrée** $A=(a_{ij})_{nxn}$ est la matrice $A^t=(a_{ji})_{nxn}$;
c'est-à-dire qu'on inverse les positions des lignes et des colonnes.

Exemple : déterminer $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}^t$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix}^t$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}$

Définition

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. Son **déterminant** est le nombre. On $det(A)=a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ note : $det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Exemple : déterminer $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\cdot(3\cdot3-(-1)\cdot1)-1\cdot((-2)\cdot3-(-1)\cdot5)+2\cdot((-2)\cdot1-3\cdot5)=0-1\cdot(-1)+2\cdot(-17)=-33$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\cdot(5\cdot3-(-1)\cdot0)-2\cdot(4\cdot3-(-1)\cdot(-2))+2\cdot(4\cdot0-5\cdot(-2))=0-2\cdot10+2\cdot10=0$$

Théorème

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors on obtient A^{-1} ainsi:

☐ on calcule $det(A)$;

☐ on calcule la **matrice des cofacteurs** $B=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

cette matrice est obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} par la valeur du déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j, puis en corrigeant les signes en multipliant par $(-1)^{i+j}$;

☐ on prend sa transposée B^t ;

☐ on obtient enfin l'**inverse de la matrice 3x3** : $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot B^t$.

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

Exemple : déterminer les inverses des matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

On a vu plus haut que $det(C)=0$, donc C^{-1} n'existe pas.

Pour A^{-1}, on a déjà calculé $det(A)=-33$; on détermine la matrice des cofacteurs :

$$B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 3-(-1)\cdot 1 & -(1\cdot 3-2\cdot 1) & 1\cdot(-1)-2\cdot 3\\ -((-2)\cdot 3-(-1)\cdot 5) & 0\cdot 3-2\cdot 5 & -(0\cdot(-1)-2\cdot(-2))\\ (-2)\cdot 1-3\cdot 5 & -(0\cdot 1-1\cdot 5) & 0\cdot 3-1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -1 & -7\\ 1 & -10 & -4\\ -17 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

on a ensuite : $B^t=\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}$, et enfin $A^{-1}=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}$

Méthode «Résoudre un système 3x3 avec le calcul matriciel »

1. on écrit le système sous forme matricielle $AX = B$
2. on calcule l'inverse de la matrice A
3. on multiple le système (par la gauche) par A^{-1} pour obtenir $X = A^{-1}B$
4. on obtient la réponse !

Exemple : résoudre le système 3x3 suivant à l'aide du calcul matriciel: $\begin{cases}-2y+5z=0\\ x+3y+z=4\\ 2x-y+3z=1\end{cases}$.

On écrit $\begin{cases}-2y+5z=0\\ x+3y+z=4\\ 2x-y+3z=1\end{cases}$ sous forme matricielle :

on construit les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$, où A est la matrice des coefficients (en lignes), S celle des variables (en colonnes) et B celle des termes libres (en colonnes) puis on écrit le système comme $\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$, soit $AS=B$.

Comme on cherche S, on peut aussi écrire

$$AS=B\Leftrightarrow A^{-1}(AS)=A^{-1}B\Leftrightarrow(A^{-1}A)S=A^{-1}B\Leftrightarrow S=A^{-1}B$$

attention : il faut bien multiplier à gauche et non à droite ... l'opération n'est pas commutative !

il faut donc d'abord déterminer A^{-1}, ce qu'on a fait plus haut :

$$A^{-1}=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

et donc $S=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A^{-1}B=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{-33}\begin{pmatrix}10\cdot 0+1\cdot 4-17\cdot 1\\ -1\cdot 0-10\cdot 4+5\cdot 1\\ -7\cdot 0-4\cdot 4+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-13}{-33}\\ \frac{-35}{-33}\\ \frac{-14}{-33}\end{pmatrix}$

les trois nombres cherchés sont $x=\frac{13}{33}$, $y=\frac{35}{33}$ et $z=\frac{14}{33}$. $S=\left\{\left(\frac{13}{33};\frac{35}{33};\frac{14}{33}\right)\right\}$

Voir les exercices 12 à 17

6 [A savoir] Transformations du plan

Définition

Nous connaissons la notion de fonction réelle, qui à tout nombre réel associe au plus un nombre réel. Une **application** est un cas particulier de fonction, dans lequel à tout nombre réel on associe exactement un nombre réel.
On appelle ces applications des **transformations du plan**.

Remarque : il est difficile de manipuler ces applications, en particulier de les représenter graphiquement... Pour mieux les visualiser, on procède souvent de la façon suivante : on construit une figure dans le plan et on fait agir l'application de telle sorte à voir l'effet que celle-ci produit sur cette figure.

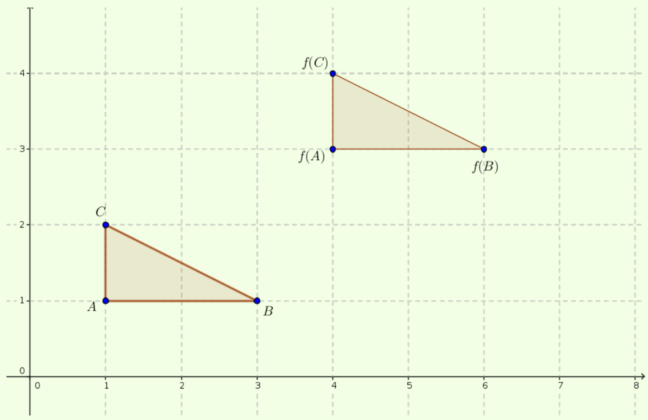
Exemple : représenter graphiquement l'image du triangle de sommets $A(1;1)$, $B(3;1)$ et $C(1;2)$ par l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T\left((x\ ;\ y)\right)=(x+3\ ;\ y+2)$

Calculons l'image par T de chaque sommet : $T(1;1)=(4;3)$, $T(3;1)=(6;3)$ et $T(1;2)=(4;4)$

Plaçons maintenant chacun de ces points sur le système d'axe et voyons ce qu'il s'est passé avec le triangle.

On constate que l'image du triangle est le même triangle (même orientation et même taille) déplacé dans la plan-

Ce type d'application s'appelle une translation

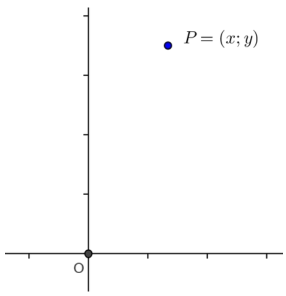


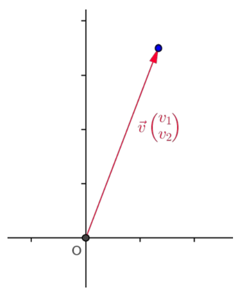
Remarque : par souci de simplification, on écrira $T\ (x\ ;\ y)$ plutôt que $T\ ((x\ ;\ y))$

Relation avec les vecteurs du plan

On peut considérer les éléments du plan soit comme des points, soit comme des vecteurs, puisque nous savons qu'il y a une correspondance un-à-un (une **bijection**) entre ces deux façon de voir :

- ☐ à tout point $P = (x;y)$ du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- ☐ à tout vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ du plan, on associe le point $P=(v_1\ ;v_2)$





On peut donc considérer une application F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ comme agissant sur des points du plan ou sur des vecteurs du plan...

Exemple : Soit la fonction F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x;y)=(2x;3y)$ peut également être vue comme $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$, qu'on écrit $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$. Le point $P(4;3)$ est associé au vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on peut calculer $F(4;3)=(2\cdot 4;3\cdot 3)=(8;9)$ ou $F\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 4 \\ 3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

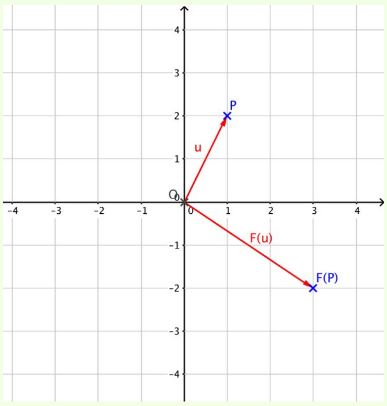
Exemple : l'application F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $F(x\,;\,y)=(3x\,;\,xy-4)$ s'écrit sous forme vectorielle : $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ xy-4 \end{pmatrix}$. On peut donc calculer l'image d'un point $P(1\,;2)$ ou l'image du vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$F(P)=F(1\,;2)=(3\,;-2)$ ou $F(\vec{u})=F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ou encore calculer l'image du point $Q(-1\,;0)$ ou du vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$F(Q)=F(-1\,;0)=(-3\,;-4)$ ou $F(\vec{v})=F\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Interprétation graphique :



7 [A savoir] Transformations connues

Translations

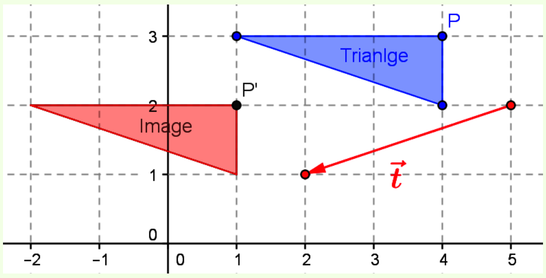
Une **translation** T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$.

Elle agit la façon suivante : $P'=T(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\vec{t}$.

☐ en composantes : $\overrightarrow{OP'}=T(\overrightarrow{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1+t_1 \\ p_2+t_2 \end{pmatrix}$

☐ en coordonnées : $P'=T(P) \Leftrightarrow (p'_1\,;p'_2)=(p_1+t_1\,;p_2+t_2)$

Exemple : illustrer la translation T de vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$



Homothéties

Une **homothétie** H : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un centre d'homothétie $C(c_1;c_2)$ et d'un rapport d'homothétie *r*.

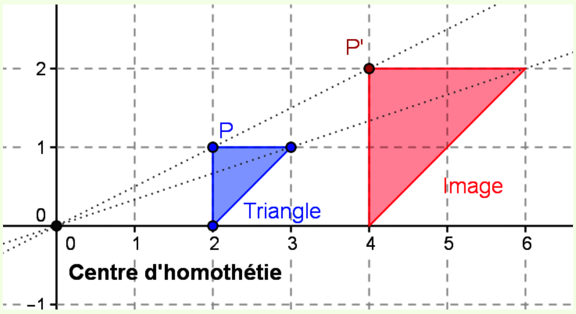
Elle agit de la façon suivante : $P'=H(P) \Leftrightarrow \vec{OP}'=\vec{OC}+r\cdot\vec{CP}$

Cas particulier où $C(0;0)$:

☐ en composantes : $\vec{OP}'=H(\vec{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot p_1 \\ r\cdot p_2 \end{pmatrix}$

☐ en coordonnées : $P'=H(P) \Leftrightarrow (p'_1;p'_2)=(r\cdot p_1;r\cdot p_2)$

Exemple : illustrer l'homothétie H de rapport 2 centrée à l'origine



Rotations

Une **rotation** R : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un centre de rotation $C(c_1;c_2)$ et d'un angle orienté α.

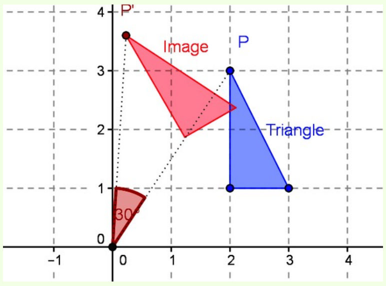
Elle agit de la façon suivante : $P'=R(P) \Leftrightarrow \|\vec{CP}'\|=\|\vec{CP}\|$,où l'angle orienté $\widehat{P'CP}$ - c'est-à-dire l'angle ont le signe est défini par le sens trigonométrique – vaut α.

Cas particulier où $C(0;0)$:

☐ en composantes : $\vec{OP}'=R(\vec{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)p_1-\sin(\alpha)p_2 \\ \sin(\alpha)p_1+\cos(\alpha)p_2 \end{pmatrix}$

☐ en coordonnées : $(p'_1;p'_2)=R((p_1;p_2)) \Leftrightarrow$
$(p'_1;p'_2)=(\cos(\alpha)p_1-\sin(\alpha)p_2;\sin(\alpha)p_1+\cos(\alpha)p_2)$

Exemple : illustrer la rotation R d'angle $\frac{\pi}{6}$ centrée à l'origine

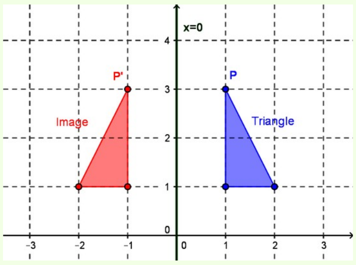


Symétrie axiales

Une **symétrie (axiale)** $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'une droite d – appelée axe de symétrie.
Elle agit de la façon suivante : $P' = S(P) \Leftrightarrow d$ est la médiatrice du segment $[PP']$

Remarque : on parle aussi parfois de symétrie centrale de centre C; on peut la voir comme une rotation de 180° autour de C.

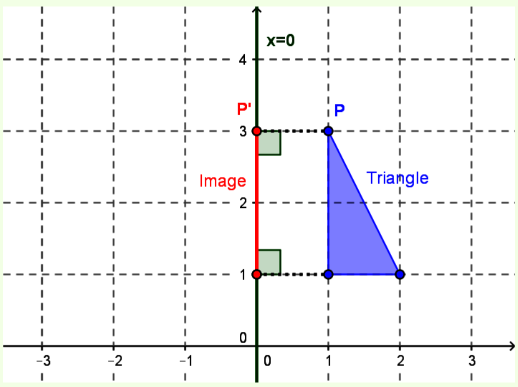
Exemple : la symétrie S d'axe $x = 0$.



Projections orthogonales

Une **projection (orthogonale)** $Pr : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ st définie par la donnée d'une droite d.
Elle agit de la façon suivante : $P' = Pr(P) \Leftrightarrow$ P' est l'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par P.

Exemple : illustrer la projection orthogonale Pr sur la droite $x = 0$



8 [Aller plus loin] Cas généraux des homothéties et rotations

Homothéties

Soit H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une homothétie définie par la donnée d'un centre d'homothétie $C(c_1;c_2)$ et d'un rapport d'homothétie *r*. On a :

en composantes : $\overrightarrow{OP'} = H(\overrightarrow{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} p_1 - c_1 \\ p_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + r\cdot(p_1 - c_1) \\ c_2 + r\cdot(p_2 - c_2) \end{pmatrix}$

en coordonnées : $P' = H(P) \Leftrightarrow (p'_1; p'_2) = (c_1 + r\cdot(p_1 - c_1); c_2 + r\cdot(p_2 - c_2))$

Rotations

Soit R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une rotation définie par la donnée d'un centre de rotation $C(c_1;c_2)$ et d'un angle orienté α . On a :

en composantes : $\overrightarrow{OP'} = R(\overrightarrow{OP}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \cos(\alpha)(p_1 - c_1) - \sin(\alpha)(p_2 - c_2) \\ c_2 + \sin(\alpha)(p_1 - c_1) + \cos(\alpha)(p_2 - c_2) \end{pmatrix}$

en coordonnées :

$$P' = R(P) \Leftrightarrow (p'_1; p'_2) =$$
$$(c_1 + \cos(\alpha)(p_1 - c_1) - \sin(\alpha)(p_2 - c_2); c_2 + \sin(\alpha)(p_1 - c_1) + \cos(\alpha)(p_2 - c_2))$$

Voir les exercices 18 à 21

9 [A savoir] Applications linéaires

Définition

Une **application** L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est **linéaire** si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- ☐ $L(\vec{v}+\vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$, pour tous vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$
- ☐ $L(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot L(\vec{v})$, pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$

Cette définition est équivalente à définir : L est **linéaire** si et seulement si $L(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha L(\vec{v}) + \beta L(\vec{w}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{v}$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : soient les deux applications définies par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$.

Sont-elles linéaires ?

Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{not}}{=} T\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 + 3 \\ v_2 + w_2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}) + T(\vec{w}) = T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 3 \\ v_2 + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 + 3 \\ w_2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 + 6 \\ v_2 + w_2 + 4 \end{pmatrix}$$

on voit que ces deux vecteurs ne sont pas toujours égaux contre-exemple : $T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$, T n'est pas linéaire.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$

Remarque : on peut bien sûr directement donner le contre-exemple

$$H(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=H\left(\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right)=H\begin{pmatrix}\alpha v_1+\beta w_1\\\alpha v_2+\beta w_2\end{pmatrix}\overset{\text{not}}{=}\begin{pmatrix}2(\alpha v_1+\beta w_1)\\3(\alpha v_2+\beta w_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\alpha v_1+2\beta w_1\\3\alpha v_2+3\beta w_2\end{pmatrix}$$

et $\alpha H(\vec{v})+\beta H(\vec{w})=\alpha\begin{pmatrix}2v_1\\3v_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2w_1\\3w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha 2v_1+\beta 2w_1\\\alpha 3v_2+\beta 3w_2\end{pmatrix}$

on voit que ces deux vecteurs sont toujours égaux; H est linéaire.

Théorème « Tester la non linéarité »

Si L est une application linéaire, alors $L(\vec{O})=\vec{O}$

Remarque : dans la pratique, on utilise surtout la contraposée de ce théorème pour démontrer la non linéarité :

Si L est une application telle que $L(\vec{O})\neq\vec{O}$, alors L n'est pas linéaire.

Exemple : soient T définie par $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$. Est-elle linéaire ?

$T(\vec{O})=T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3\\0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\neq\vec{O}$, donc T n'est pas linéaire.

10 [A savoir] Linéarité des transformations de base

Théorème « Linéarité des transformations de base »

Les translations ne sont pas linéaires.
Les homothéties et rotations dont le centre n'est pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les homothéties et rotations dont le centre est l'origine sont linéaires.
Les symétries dont l'axe ne contient pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les symétries dont l'axe contient origine sont linéaires.
Les projections sur un axe qui ne contient pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les projections sur un axe qui contient l'origine sont linéaires.

11 [A savoir] Propriété fondamentale des applications linéaires

Définition

La **base canonique** de $\mathbb{R}^2$ est formée des deux vecteurs : $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Théorème « Une AL est entièrement déterminée par deux images »

Une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est entièrement définie par les images des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Autrement dit : Si L est une application linéaire et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les deux vecteurs de la base canonique, alors $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\cdot L(\vec{i})+y\cdot L(\vec{j})$

Exemple : soit l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Montrer qu'à partir de ces informations, on peut calculer $L\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et même déterminer $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$$L\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = L(3\vec{i}+4\vec{j})=3L(\vec{i})+4L(\vec{j}) = 3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+8\\6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = L(x\vec{i}+y\vec{j})=xL(\vec{i})+yL(\vec{j}) = x\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y\\2x+y\end{pmatrix}$$

Remarque : la connaissance de deux autres images permet souvent également de déterminer toute autre image !

Exemple : soit l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $L\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Montrer qu'à partir de ces informations, on peut déterminer $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On pose $L(\vec{i})=\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix}$

On a : $L\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = L(-\vec{i}+2\vec{j})=-L(\vec{i})+2L(\vec{j}) = -\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i_1+2j_1\\-i_2+2j_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

de même : $L\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = L(2\vec{i}+3\vec{j})=2L(\vec{i})+3L(\vec{j}) = 2\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2i_1+3j_1\\2i_2+3j_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ce qui est équivalent aux systèmes $\begin{cases}-i_1+2j_1=3\\-i_2+2j_2=1\end{cases}$ et $\begin{cases}2i_1+3j_1=0\\2i_2+3j_2=0\end{cases}$

On résout ces deux systèmes en considérant d'abord la 1re équation de chacun :

$\begin{cases}-i_1+2j_1=3\\2i_1+3j_1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2i_1+4j_1=6\\2i_1+3j_1=0\end{cases}$ d'où : $7j_1=6 \Leftrightarrow j_1=\frac{6}{7}$ et $i_1=2j_1-3=2\frac{6}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7}$

$\begin{cases}-i_2+2j_2=1\\2i_2+3j_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2i_2+4j_2=2\\2i_2+3j_2=0\end{cases}$ d'où : $7j_2=2 \Leftrightarrow j_2=\frac{2}{7}$ et $i_2=2j_2-1=2\frac{2}{7}-1=\frac{4}{7}-1=-\frac{3}{7}$

on a donc $L(\vec{i})=\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, ce qui permet de retrouver comme dans l'exemple précédent : $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L(x\vec{i}+y\vec{j})=xL(\vec{i})+yL(\vec{j}) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7}x+\frac{6}{7}y \\ -\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y \end{pmatrix}$

12 [A savoir] Matrice d'une application linéaire

Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et $\vec{i}, \vec{j}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Nous avons donc : $L(\vec{v}) = L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L(x\vec{i}+y\vec{j}) = xL(\vec{i})+yL(\vec{j})$

Supposons que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ et que $L(\vec{j})=\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}$, on peut alors en déduire que :

$$L(\vec{v}) = xL(\vec{i})+yL(\vec{j}) = x\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xi_1+yj_1 \\ xi_2+yj_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On vient de démontrer le

Théorème « Matrice d'une application linéaire »

Si L est une application linéaire telle que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}$, alors $L(\vec{v})=\begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}\cdot\vec{v}$

$\begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de L (relativement à la base canonique)**

Remarque : on retrouve ici une application de la multiplication des matrices !

Exemple : soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+2y \end{pmatrix}$. Déterminer M_L (relativement à la base canonique) et l'utiliser pour calculer l'image de $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

On calcule $L(\vec{i})=L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $M=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L(\vec{v})=L\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot5+(-3)\cdot(-3) \\ 1\cdot5+2\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Remarque : dans cette situation où on connaît $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\x+2y\end{pmatrix}$, il n'est pas très utile de calculer $L(\vec{v})$ ainsi !

Exemple : soit une application linéaire L dont on ne connaît que $L(\vec{i}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $L(\vec{j}) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ Déterminer $L(\vec{u})$.

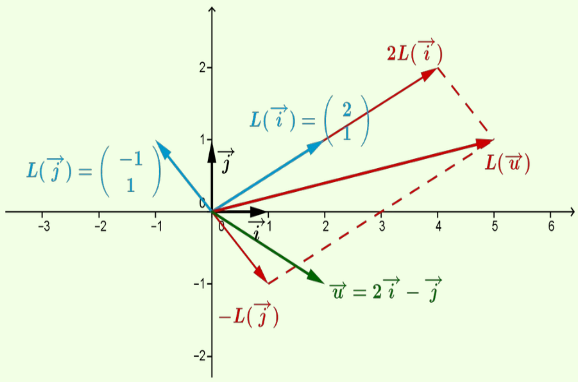
On écrit $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2\vec{i}-\vec{j}$, puis

$$L(\vec{u})=L(2\vec{i}-\vec{j})=2L(\vec{i})+2L(\vec{j})=2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

On peut aussi travailler avec la matrice $M_L = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ associée à L :

$$L(\vec{u}) = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+1\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Géométriquement :



13 [A savoir] Matrices particulières

Identité

L'**application identité**, notée $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, est définie par $I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Cette application est linéaire et sa matrice associée est la **matrice identité** $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Homothéties

La matrice d'une homothétie $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de centre O et de rapport r est $M_H=\begin{pmatrix}r & 0\\0 & r\end{pmatrix}$

Rotations

La matrice d'une rotation $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de centre O et d'angle α est

$$M_R=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Symétries

La matrice d'une symétrie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe Ox est $M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe Oy est $M_S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe $y=x$ est $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe $y=-x$ est $M_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Projections orthogonales

La matrice d'une projection $Pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe Ox est $M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $Pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe Oy est $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $Pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe $y=x$ est $M_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $Pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe $y=-x$ est $M_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

14 [Aller plus loin] Cas général des symétries et des projections

Symétries : cas général

La matrice d'une symétrie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe faisant un angle θ avec l'axe Ox est

$$M_S = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Projections: cas général

La matrice d'une projection $Pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe faisant un angle θ avec l'axe Ox est

$$M_{Pr} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Voir les exercices 22 à 37

15 [A savoir] Composition

Théorème « Composition de deux applications linéaires »

Soient L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires telles que $F \circ L$ existe. Alors $F \circ L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est aussi une application linéaire.

Théorème « Matrice de la composition de deux applications linéaires »

Soient L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires telles que $F \circ L$ existe et soient M_L et M_F leurs matrices respectives relativement à la base canonique. Alors on a $M_{F \circ L} = M_F \cdot M_L$

Exemple : soient S la symétrie d'axe O_x de matrice $M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et R la rotation de 180° centrée à l'origine de matrice $M_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $(R \circ S)$ et la décrire géométriquement.

La composition a pour matrice $M_{R \circ S} = M_R \cdot M_S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Elle correspond à une symétrie d'axe Oy.

16 [A savoir] Réciproque

Théorème « Réciproque d'une application linéaire »

Soit L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que sa réciproque L^r existe.
Alors L^r: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est aussi une application linéaire

Théorème « Matrice de la réciproque d'une application linéaire »

Soit L : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que sa réciproqu L^r existe et soit $M = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}$ la matrice de L relativement à la base canonique. Alors la matrice de L^r est l'inverse de la matrice de L, c'est-à-dire que $L^r \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Remarques :

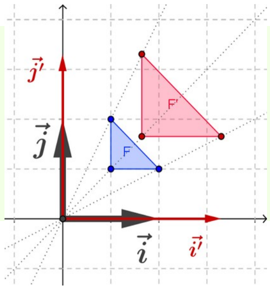
☐ le théorème sur l'application linéaire réciproque dit que « la matrice associée à l'application réciproque est l'inverse de la matrice de l'application linéaire ».

☐ il existe des applications non linéaires qui admettent des réciproques. Par exemple la translation $T_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v}$ admet une réciproque. Il s'agit de la translation de vecteur $-\vec{v}$. On note alors : $(T_{\vec{v}})^r = T_{-\vec{v}}$;

☐ pour savoir si une application linéaire admet une réciproque, il suffit de tester si le déterminant de la matrice associée à l'application linéaire n'est pas nul.

Exemple : l'homothétie H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rapport r centrée à l'origine

$M_H = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ et $det(M_H) = r^2$, donc $M_H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$



Exemple : la rotation R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'angle α centrée à l'origine

On a $M_R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et $det(M_R) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, donc

$M_R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Exemple : la symétrie S : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe faisant un angle α avec laxe Ox.

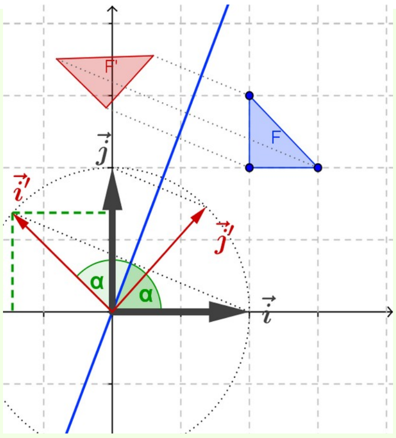
On a $M_S = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$

car $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

et $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

d'où $det(M_S) = -1$ et donc

$M_S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = M_S$.



Voir les exercices 38 à 52

Matrices

1 Donner des exemples de matrices de votre choix du type M_{2x3}, M_{4x2}, M_{1x3}, M_{2x2} et M_{nxn}.

2 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer :

a. $D+B$
b. $D+I$
c. $B+A$
d. $O+D$
e. $C+D$
f. $2B$
g. $-3D$
h. $\sqrt{2}\cdot I$
i. $2E$
j. $-F$
k. $O-B+4D$

3 Les matrices peuvent servir à représenter les déplacements de personnes ou d'animaux d'une région à une autre. On utilisera à cette fin une **matrice** dite **de transition** qui décrit en pourcentage la transition d'une région à une autre et une **matrice** dite **de population** qui indique la répartition de la population par rapport à chacune des régions concernées.

Si les schémas de transition ne varient pas au cours du temps (ce qui veut dire que la matrice de transition est constante) alors on peut considérer qu'une situation d'équilibre est atteinte lorsque la population de chaque région reste stable. Lorsque la situation d'équilibre est atteinte, on peut se rendre compte qu'une augmentation de la population dans une région donnée est compensée par une diminution de cette même population durant la période considérée.

Imaginer que le coût de l'énergie dans le nord d'un pays d'Europe augmente et semble être la cause d'une migration de la population du nord vers le sud du pays selon les proportions indiquées voir le schéma ci-dessous :

Soit P_N la population au nord du pays pour une année donnée et P_S la population au sud du pays pour la même année.

Le nombre 0,95 dans le tableau indique que 95% de ceux qui habitent le nord habiteront encore au nord l'année suivante. Le nombre 0,05 représente les 5% qui migreraient du nord au sud durant l'année suivante.

Le nombre 0,98 dans le tableau indique que 98% de ceux qui habitent le sud habiteront encore le sud l'année suivante. Le nombre 0,02 représente les 2% qui migreront du sud au nord durant l'année suivante.

Pour simplifier la suite de la discussion, on supposera que les paramètres 0,95 et 0,98 reflètent l'effet global dû aux naissances, décès, immigration et émigration au cours de l'année.

Supposons de plus que la population totale est de 70 millions d'habitants, en d'autres termes – si l'unité de calcul est le million - que $P_N + P_S = 70$.

a. Trouver une matrice S pour transcrire les informations dans le tableau ci-dessus.

b. Trouver une matrice P pour décrire la population du pays.

c. A l'aide d'une formule déterminer la population P'_N au nord P'_S et au sud du pays l'année suivante.

L'équilibre est atteint lorsque $P_N = P'_N$ et $P_S = P'_S$.

d. Montrer que la population est stable si les conditions suivantes sont réalisées $0{,}95P_N + 0{,}02\,P_S = P'_N$ et $0{,}05P_N + 0{,}98\,P_S = P'_S$

e. Déterminer P_N et P_S de telle sorte que la population soit stable.

f. Imaginer une opération entre matrices qui permet de répondre à la question c).

g. En utilisant l'opération déterminée ci-dessus entre matrices, déterminer une condition pour décrire l'équilibre de la population.

Voir la théorie 1 à 2

Multiplier des matrices

4 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :

a. BA **b.** AB **c.** BD **d.** DB

e. OA **h.** I^3 **k.** CA **n.** ACB

f. AO **i.** DIB **l.** I^{2345} **o.** $OIBDBDD$

g. DI **j.** AC **m.** CB

5 Démontrer le résultat suivant :

AB et BA existent les deux $\Leftrightarrow$ A et B sont des matrices carrées.

6 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Calculer $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

7 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Effectuer les opérations suivantes :

a. A^2 **b.** B^3 **c.** C^2

8 Soit A une matrice carrée telle que $A^2=A$. Montrer que $(2A-I)^2=I$.

9 Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -\sin(\alpha)\\ -1 & 0 & \cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\end{pmatrix}$.

Calculer A^3.

10 Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

11 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Écrire A sous la forme $A=I+B$ et calculer A^n, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Voir la théorie 3

Déterminants et inverses

12 Déterminer les déterminants et les matrices inverses des matrices suivantes :

a. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **c.** $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 9 & 6\end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **d.** $D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

e. $E=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

13 Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $A=\begin{pmatrix}2a & a\\ -3 & a\end{pmatrix}$ n'est-elle pas inversible?

14 Résoudre les systèmes suivants avec le calcul matriciel :

a. $\begin{cases}2x+5y=-1\\ -3x-2y=4\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}-3x+6y=1\\ -2x+4y=3\end{cases}$

15 Déterminer, lorsque cela est possible, la matrice inverse de chacune des matrices suivantes et vérifier le résultat obtenu en effectuant les produits dans les deux sens de la matrice donnée par son inverse :

a. $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ **b.** $F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

16 Résoudre le système suivant avec le calcul matriciel : $\begin{cases}x-y+2z=-1\\ 2y-z=1\\ 3x+z=1\end{cases}$

17 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si A et B sont des matrices 2x2, alors $det(A)\cdot det(B)=det(A\cdot B)$

b. Il existe deux matrices A et B telles $A\neq B$ et $AB=BA$.

c. Soit A et B deux matrices telles que le produit AB existe, alors AB est une matrice carrée.

d. Soit A et B deux matrices carrées telles que $AB=BA$, alors au-moins l'une des deux est une matrice diagonale.

e. Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et B une matrice carrée telle que $AB=BA$, alors B est de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$

f. Si $A=\begin{pmatrix}11 & 17\\ 15 & 13\end{pmatrix}$, alors il existe une matrice B telle que $AB=\begin{pmatrix}12 & 18\\ 16 & 14\end{pmatrix}$.

g. La matrice $A=\begin{pmatrix}2 & \alpha \\ \alpha & 8\end{pmatrix}$ est inversible pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

h. Si A est une matrice diagonale inversible alors A^{-1} est une matrice diagonale.

i. Si A et B sont deux matrices 2x2 telles que $AB = BA = A$, alors $B = I$.

Voir la théorie 4 à 6

Transformations du plan

18 Dessiner les images des points $A(-3;2)$, $B(7;1)$ et $C(4;5)$ par les applications suivantes afin de dessiner l'image du triangle $\Delta\ ABC$:

a. $F_1(x\ ;\ y)=(x-1\ ;\ y+4)$

b. $F_2(x\ ;\ y)=(2\ x\ ;\ 2\ y)$

c. $F_3(x\ ;\ y)=(xy\ ;\ x-2)$

d. $F_4(x\ ;\ y)=(-y\ ;\ x)$

Décrire en français, si possible, l'effet de chaque application sur le triangle $\Delta\ ABC$.

19 Soit la fonction F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\3y\end{pmatrix}$.

a. Calculer les images des vecteurs suivants $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

b. Représenter ces quatre vecteurs et leurs images par F.

c. Quel est l'image du cercle trigonométrique par cette application ?

20 Donner l'image du point $A(3\ ;1)$, d'un point quelconque $(x\ ;\ y)$ et du triangle $\Delta(ABC)$ où $A(3;1)$, $B(-2;4)$ et $C(5;-2)$ par les transformations du plan suivantes :

a. la translation T définie par $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

b. l'homothétie H de centre C et de rapport r =-2

c. l'homothétie H' de centre $O(0;0)$ et de rapport r=1,5

d. la rotation R de centre C et d'angle (orienté) $\alpha=135°$

e. la rotation R' de centre $O(0;0)$ et d'angle (orienté) $\alpha=\frac{\pi}{3}$

f. la symétrie S d'axe $y = -x$

g. la symétrie S par rapport à l'origine.

h. la projection P sur la droite d'équation y=2

i. la symétrie S_2 d'axe Oy.

21 Soit P la projection orthogonale dans le plan sur la droite d d'équation $y = -x$.

Représenter graphiquement d et les images par P des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Voir la théorie 7 à 8

Applications linéaires

22 Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

a. $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$

b. $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$

c. $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$

d. $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy\\0\end{pmatrix}$

e. $G\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\y+1\end{pmatrix}$

f. $F(x\,;y)=(y\,;x+y)$

g. $K(\vec{v})=-3\vec{v}$

23 Etudier la linéarité ou non :

a. des translations ;

b. des homothéties ;

c. des rotations.

24 Pour chacune des deux applications linéaires définies ci-dessous par deux de leurs images :

$F_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $F_1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$F_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $F_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

Calculer les images de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

25 Trouver, si c'est possible, une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui transforme :

a. la droite d'équation $y=x$ en la droite d'équation $y=-2x$;

b. la droite d'équation $y=x$ en la droite d'équation $y=-2x+1$;

c. le carré de sommets (1;-1), (1;1), (-1;1) et (-1;-1) en le rectangle de sommets (3;-2), (3;2),(-3;2) et (-3;-2).

26 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$$

a. Déterminer l'image par F de la droite $x=2$

b. Soit la droite d d'équation $x=2y$. Sur le même repère, dessinez d et $F(d)$.

c. F est-elle linéaire ? Justifier.

27 Déterminer les matrices des applications $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes (par rapport à la base canonique) :

a. l'identité

b. l' homothétie de coefficient r

c. la rotation d'angle θ autour de l'origine

28 Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pour :

a. $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ **b.** $G : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$

29 Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

a. symétrie d'axe Ox

b. symétrie d'axe Oy

c. symétrie centrale de centre O.

d. symétrie d'axe $y = -x$.

e. rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens trigonométrique) autour de l'origine.

f. rotation d'angle π et de centre O

g. rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre O

h. projection orthogonale sur Ox

i. projection orthogonale sur Oy

j. projection orthogonale sur la droite $y=x$.

30 Déterminer la matrice de la symétrie d'axe d, où d est une droite formant l'angle θ avec l'axe Ox (par rapport à la base canonique).

31 Déterminer la matrice de la projection sur l'axe d, où d est une droite formant l'angle θ avec l'axe Ox (par rapport à la base canonique).

32 Montrer que l'image d'un segment par une application linéaire est un segment.

33 Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $L(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a. Calculer l'image de $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ par L.

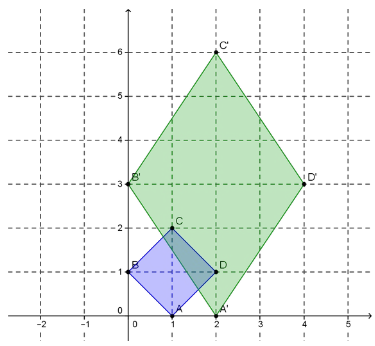
b. Généraliser en calculant l'image de n'importe quel vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ par L.

c. Quel est l'ensemble des images par L du carré de sommets $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$?

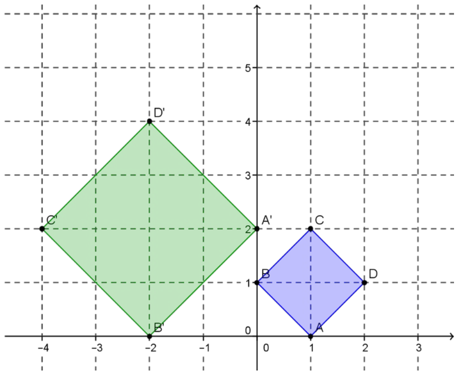
d. Déterminer le(s) vecteur(s) $\vec{b}$ tel(s) que $L(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

34 Dans chaque cas, déterminer, si c'est possible, une application linéaire qui transforme le carré $ABCD$ en quadrilatère $A'B'C'D'$:

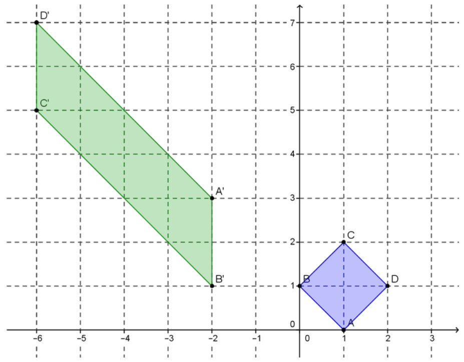
a.



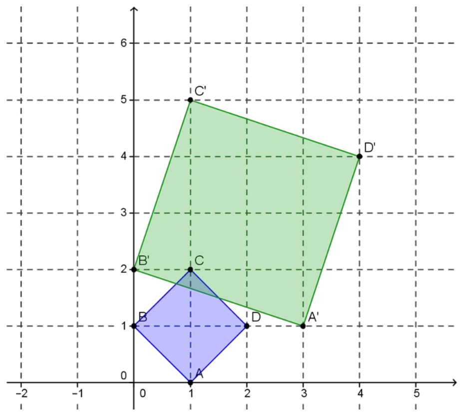
b.



c.



d.



35 Donner les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

a. $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2y\\-x+5y\end{pmatrix}$ **b.** $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\end{pmatrix}$

c. $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ **d.** $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$

36 Soit F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice associée à F.

37 Décrire géométriquement l'application linéaire associée à la matrice donnée :

a. $M_F=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

b. $M_G=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

c. $M_H=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$

d. $M_K=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

Voir la théorie 9 à 11

Composition et réciproque

38 Soit L et K deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\3x+7y\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\x-2y\end{pmatrix}$. Déterminer $L\circ K$:

a. sans utiliser les matrices associées ;

b. en utilisant les matrices associées.

39 On considère la rotation R d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée à l'origine.

a. Déterminer la matrice M_R associée à la rotation R.

b. Calculer $M_R^{\ 2}$, $M_R^{\ 3}$ et $M_R^{\ 4}$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

c. Calculer $M_R^{\ 2016}$.

40 Soient $R_{\frac{\pi}{2}}$ une rotation de $\frac{\pi}{2}$ centrée en l'origine, R_π une rotation de π centrée en l'origine, S_x une symétrie d'axe O_x et S_y une symétrie d'axe O_y. Déterminer les matrices associées aux applications suivantes et interpréter les résultats obtenus :

a. $R_{\frac{\pi}{2}}\circ R_\pi$

b. $S_x\circ S_y$

c. $S_y\circ R_\pi$

d. $R_{\frac{\pi}{2}}\circ S_x$

41 Ecrire les matrices associées aux applications linéaires suivantes puis donner, si elles existent, les matrices inverses et en déduire l'expression algébrique des applications qui sont associées à ces inverses :

a. $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-y\\-2x+5y\end{pmatrix}$

b. $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$

c. $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+x\\x-y\end{pmatrix}$

d. $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+6y\\9y+6x\end{pmatrix}$

42

a. Montrer que les symétries d'axes O_x et O_y admettent une réciproque et déterminer la matrice associée à ces réciproques. Expliquer pourquoi.

b. Montrer que les projections sur les axes O_x et O_y n'admettent pas de réciproque. Expliquer pourquoi.

c. Que peut-on dire du cas général des symétries d'axe quelconque passant par l'origine ?

43 Soit $Pr : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite $y=x$.

a. Déterminer la matrice M_{Pr} associée à la projection *P*.

b. Calculer M_{Pr}^2 .

c. Montrer que la projection orthogonale sur la droite $y=x$ n'admet pas de réciproque.

44 À l'aide du calcul matriciel, montrer que la composée d'une symétrie par rapport à la droite $y = x$ suivie par une symétrie par rapport à la droite $y = -x$ correspond à une rotation de 180° autour de l'origine.

45 Soient Sx une symétrie d'axe Ox, Sy une symétrie d'axe Oy, R_{90} une rotation de 90° autour de l'origine (dans le sens trigonométrique) et R_{180} une rotation de 180° autour de l'origine. Calculer les matrices des applications suivantes (dans la base canonique) et les décrire géométriquement :

a. $Sx \circ Sy$

b. $Sy \circ R_{180}$

c. $R_{90} \circ Sx$

d. $R_{180} \circ R_{90}$

46 Soient S_{30} et S_{60} les symétries par rapport à des droites de pente positive qui passent par l'origine et qui forment (respectivement) des angles de 30° et 60° avec l'axe Ox. À l'aide du calcul matriciel, montrer que la composée $S_{60}\circ S_{30}$ est une rotation de 60° autour de l'origine.

47 Calculer la matrice (dans la base canonique) de la transformation composée d'une rotation de 45° autour de l'origine (dans le sens trigonométrique) suivie de l'homothétie $H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,x\\\sqrt{2}\,y\end{pmatrix}$ de rapport $\sqrt{2}$.

48 Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y\\-x+5y\end{pmatrix}$. Déterminer, si possible, l'application linéaire réciproque $L^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

49 Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\2x+2y\end{pmatrix}$. Déterminer, si possible, l'application linéaire réciproque $L^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

50 Montrer qu'une symétrie S par rapport à une droite qui passe par l'origine et qui forme un angle α avec l'axe Ox possède une réciproque, et calculer la matrice associée à S^{-1}.

51 En utilisant un raisonnement sur les rotations, trouver une matrice $A \neq I$ telle que $A^3 = I$.

52 Montrer que la composée de deux symétries par rapport à des droites qui passent par l'origine est une rotation autour de l'origine.

Indication : utiliser les formules trigonométriques :

$\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)$

$\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha-\beta)$.

Voir la théorie 12 à 13

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.»

Pierre-Simon De Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749-1827) »

A savoir en fin de chapitre

Matrices et opérations entre matrices

✔ matrices ;matrice carrée, diagonale, triangulaire ; égalité entre deux matrices ;

✔ addition de deux matrices ; multiplication d'une matrice par un scalaire ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Multiplier des matrices

✔ multiplication de deux matrices ;

✔ * applications du calcul matriciel ;

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 11

Déterminants et matrices inverses

✔ déterminant et inverse d'une matrice 2x2 ; application à la résolution d'un système 2x2 ;

✔ * déterminant et inverse d'une matrice 3x3 ; application à la résolution d'un système 3x3 ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices12 à 17

Transformations du plan

✔ transformations du plan ; cas particuliers des translations, homothéties, rotations, symétries et projections ;

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 18 à 21

Applications linéaires

✔ applications linéaires ; matrice d'une application linéaire ;

Voir la théorie 9 à 14 et les exercices 22 à 37

Composition et réciproque

✔ composition d'applications linéaires et lien avec le calcul matriciel ;

✔ réciproque d'une application linéaire et lien avec le calcul matriciel.

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 38 à 52

Quelques compléments en ligne

en particulier des vidéos explicatives ...

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-4e/complements/ch04