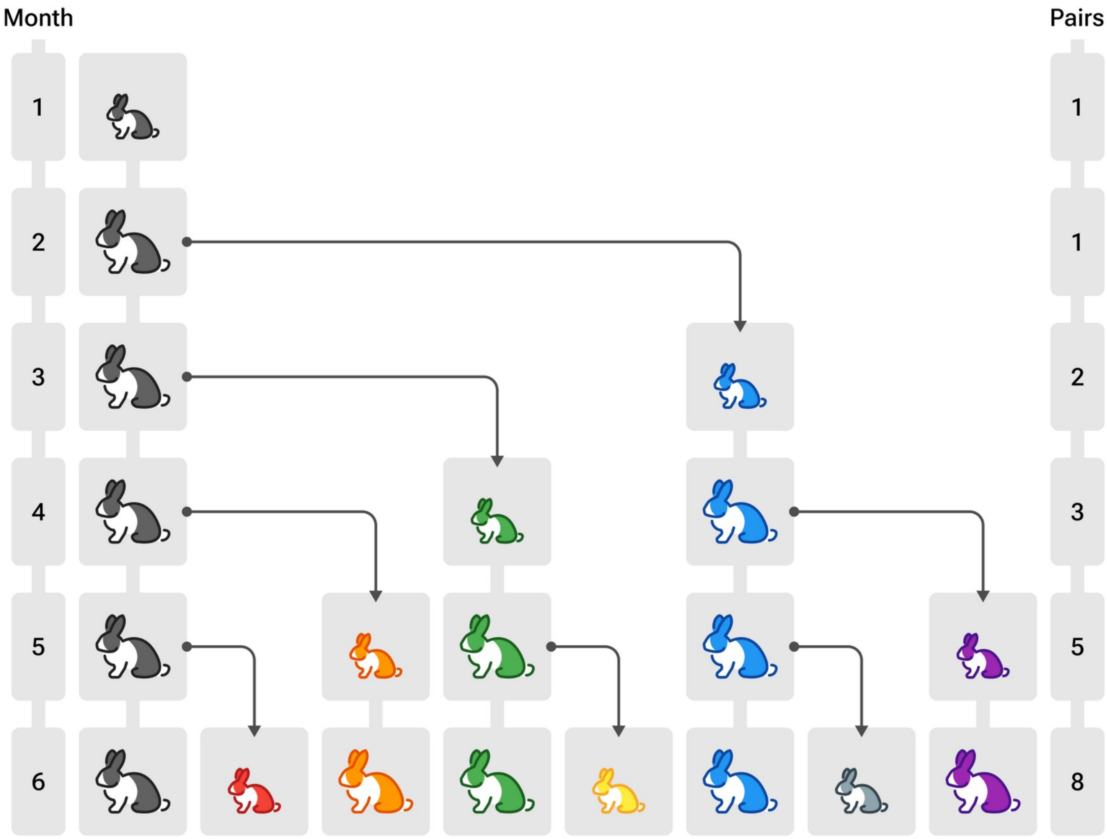
Chapitre Av3 - Suites et séries



Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci#/media/Fichier:Fibonacci_Rabbits.svg

L'essentiel des contenus de ce chapitre sont issus du cours de Didier Muller
MADIMU : https://www.apprendre-en-ligne.net/suites/index.html

Problème

Quatre nombres de trois chiffres sont consécutifs et chacun d'eux est divisible par la somme de ses chiffres. Quel est le plus petit de ces nombres ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Suites et séries arithmétiques

1. Dans un virage d'un stade, le nombre de siège dépend de la rangée. En effet, il y a moins de sièges proches de la pelouse que de sièges au dernier rang.

Au premier rang du virage, on a placé 15 sièges. On ajoute 2 sièges chaque fois que l'on monte d'un rang (il y a donc 17 sièges au deuxième rang, 19 au troisième, etc.).

a. Combien y a-t-il de sièges à la 27e rangée ?

b. Combien y a-t-il de sièges au total entre la 1re et la 27e rangée ?

2. Définir les notions de **suite arithmétique** et de **série arithmétique**, puis généraliser les formules pour obtenir le n-ième terme et la somme des n premiers termes.

2 [Activité] Suites et séries géométriques

1. Un curieux nénuphar situé au milieu d'un bel étang s'y trouve tellement bien qu'il ne cesse de grandir : sa taille double chaque jour. Il grandit tellement qu'après 30 jours, il recouvre entièrement la surface de l'étang !

a. Combien de jours a-t-il mis pour ne recouvrir que la moitié de l'étang ?

b. Quel pourcentage de l'étang recouvrait-il après 26 jours ?

2. Un nommé Sissa, l'inventeur du jeu d'échecs, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit : « Que tes serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu'à la soixante- quatrième case. »

a. Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs ?

b. En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm^3, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait une surface équivalente à celle de la Suisse (la Suisse s'étend sur une superficie de 41'288 km^2) ?

3. Définir les notions de **suite géométrique** et de **série géométrique**, puis généraliser les formules pour obtenir le n-ième terme et la somme des n premiers termes.

3 [Activité] A l'infini

1. Etudier le comportement à l'infini d'une suite géométrique.

2. Etudier le comportement à l'infini de la série géométrique.

4 [Aller plus loin] Fractales

1. Une **fractale** est un objet mathématique, tel qu'une courbe ou une surface, dont la structure est **invariante par changement d'échelle**. Le terme « fractale » est un néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 à partir de la racine latine fractus, qui signifie « brisé », « irrégulier ».

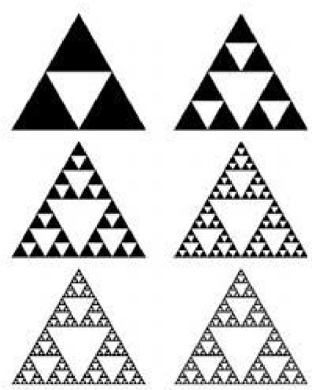
Benoît Mandelbrot (1924 - 2010)

De nombreux phénomènes naturels – comme le tracé des lignes de côtes, les nuages, les montagnes ou l'aspect du chou romanesco – possèdent des formes fractales approximatives.

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties ;
- sa « **dimension de Hausdorff** » est strictement supérieure à sa dimension topologique. Nous n'allons pas entrer dans les détails de la dimension de Hausdorff ici. De façon imagée, les fractales se caractérisent par une sorte de dimension non entière.

2. La figure ci-contre montre les 6 premières étapes de la construction du « **triangle de Sierpinski** » (1915).



Waclaw Sierpinski (1882 - 1969)

On le construit en dessinant un triangle équilatéral noir.

À l'étape 1, on le divise en quatre triangles équilatéraux comme montré sur la figure ci-contre, puis le triangle central est enlevé.

À l'étape suivante, on recommence le même processus avec chacun des triangles noirs.

En poursuivant ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpinski.

a. Déterminer une suite géométrique a_k qui donne le nombre de triangles enlevés lors de la k-ième étape.

b. Calculer le nombre de triangles enlevés de la pièce lors de la 15ème étape.

c. Calculer le nombre total de triangles enlevés de la pièce après 15 étapes.

d. En supposant que le triangle de départ ait une surface de 1 unité, Calculer une suite b_k qui donne la surface des pièces enlevées lors de la k-ième étape. Montrer que cette suite est une suite géométrique.

e. Déterminer la surface enlevée lors de la septième étape.

f. Déterminer la surface totale enlevée de la pièce après la septième étape.

g. Déterminer quelle proportion de l'aire du triangle de départ est encore noire lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

Le triangle de Sierpinski a une dimension de Hausdorff de $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.858$

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 9

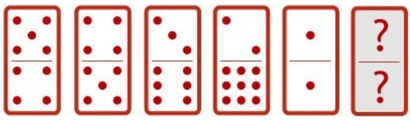
5 [Aller plus loin] Introduction

1. « La notion de **suite** est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C et plus récemment au 1er siècle après J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie (voir l'exercice d'approfondissement 1).

On retrouvera cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du 17ème siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions.

Dans la seconde moitié du 20ème siècle, le développement des ordinateurs donne un souffle nouveau à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

Plus anecdotique, on retrouve aussi des suites dans les tests de Q.I. On donne les premiers éléments d'une suite (pas forcément des nombres) et il faut trouver l'élément suivant :



Signalons le fabuleux site On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®), à l'adresse http://www.oeis.org. Cette encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers permet d'effectuer gratuitement des recherches parmi une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique ou parfois simplement ludique. Dans cette forme et cette présentation, c'est la plus grande du monde (en 2012)».

Source : Didier Muller, Madimu

6 [Activité] Suites numériques

1. Définir la notion de **suite numérique**. Donner des exemples en précisant les notations.

2. Expliquer pourquoi on peut dire qu'une suite numérique est une fonction.

3. Définir et illustrer les notions de suite (**strictement**) **croissante**, **décroissante**, **monotone alternée**, **majorée**, **minorée** et **bornée**.

4. Soit la suite $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Est-elle (dé)croissante ? strictement (dé)croissante ?

7 [Activité] Convergence d'une suite

1. Qu'entend-t-on par **convergence d'une suite numérique** ?

2. Illustrer graphiquement avec les suites définies par $s_n=-\frac{2}{n}$, $t_n=\frac{2n+1}{n}$ et $v_n=\frac{n}{3}$.

3. Rappeler la définition rigoureuse de la convergence d'une suite vue en 3e.

4. Illustrer avec GeoGebra.

5. Démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=2$.

6. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

7. Quelle est la limite de $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

8. Que peut-on dire d'une suite monotone et bornée ? Illustrer par un exemple.

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 10 à 16

8 [Activité] Séries numériques

1. Définir la notion de **série numérique**. Donner des exemples en précisant les notations.

2. Définir la **série harmonique**.

9 [Activité] Convergence d'une série

1. Qu'entend-t-on par **convergence d'une série** ?

2. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

3. Montrer que la série harmonique diverge.

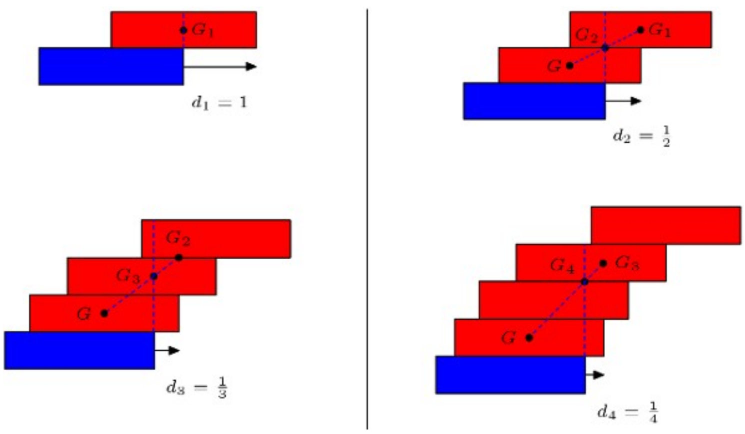
4. Que peut-on dire d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ?

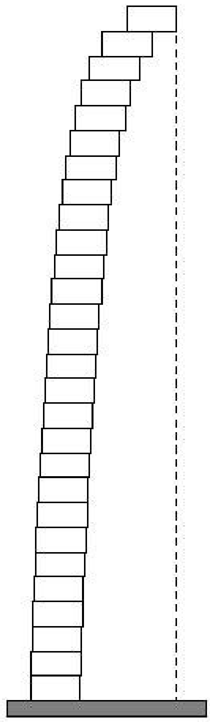
5. La série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k}{4k-1}$ converge-t-elle ?

10 [Aller plus loin] Empilement de dominos

« En architecture, un porte-à-faux est une construction qui est supportée par une partie qui est elle-même au-dessus du vide. Avec des pièces de domino on peut faire, par exemple, une structure de type porte-à-faux comme ci-contre.

L'empilement est stable tant que chaque domino est traversé par la verticale du centre de gravité de l'ensemble des dominos qui sont au-dessus de lui.





Pour trouver le plus grand surplomb possible, l'astuce consiste à construire la tour... en commençant par le haut ! Choisissons comme unité la longueur d'un demi-domino :

- avec 2 dominos, il est clair que le surplomb maximal vaut 1 ;
- avec 3 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 ;
- avec 4 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 ;
- avec 5 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4.

Le surplomb maximal que l'on peut réaliser avec une boîte de 28 dominos vaut donc 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4+ ... + 1/27 soit approximativement 3.92 (un peu moins que la longueur de 2 dominos).

Théoriquement, si l'on dispose d'un nombre suffisant de dominos, on peut réaliser un empilement permettant un surplomb aussi grand qu'on le veut, puisque la série harmonique tend vers l'infini. Lentement, mais sûrement ! Ainsi, avec dix boîtes, on pourrait obtenir un surplomb de 6.2 (un peu plus de trois longueurs de domino). Pour réaliser un surplomb de dix dominos, il faudrait utiliser 272'400'600 dominos... »

Didier Muller, Madimu

11 [Activité] Quelques séries de référence

1. Rappeler ou étudier la convergence des séries suivants :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot r^n$ **b.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ **c.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **d.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ **e.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

2. Que penser de la convergence des séries suivantes ?

a. $\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{1}{n}$ **b.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-k}, \forall k \in \mathbb{R}$ **c.** $\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{1}{n^2-3}$

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 17 à 18

12 [Activité] Séries alternées

1. Qu'entend-t-on par **série alternée** ?

2. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge-t-elle ?

3. Enoncer le théorème «Critère de convergence pour une série alternée » et l'appliquer à la série précédente.

13 [Activité] Critère de comparaison

1. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge-t-elle ?

2. Enoncer le théorème « Critère de comparaison » et l'appliquer à la série précédente.

14 [Activité] Séries de Riemann

1. Définir les **séries de Riemann**.

2. Etudier leur convergence.

3. Les séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ convergent-elles ?

15 [Activité] Critère du quotient

1. La série $\frac{1!}{10}+\frac{2!}{100}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$ converge-t-elle ?

2. Enoncer le théorème « Critère du quotient » et l'appliquer à la série précédente.

16 [Activité] Critère de la racine

1. La série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$ converge-t-elle ?

2. Enoncer le théorème « Critère de la racine » et l'appliquer à la série précédente.

17 [Activité] Critère de l'intégrale

Enoncer le théorème « Critère de l'intégrale » et l'appliquer à la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

18 [Activité] Convergence absolue

1. Qu'entend-t-on par **convergence absolue** ?

2. La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{10k+1}}{k(k+1)}$ converge-t-elle ?

3. Enoncer le théorème « Critère de convergence absolue » et l'appliquer à la série précédente.

4. La réciproque est-elle vraie ?

19 [Aller plus loin] Le calcul de π

Jusqu'en 1400 environ, la précision des approximations de π n'excédait pas les 10 décimales. Les progrès en matière de calcul intégral et de séries vont permettre d'améliorer cette précision. Les séries permettent d'approcher π avec d'autant plus de précision qu'on utilise de termes de la série pour le calcul. Vers 1400, Madhava de Sangamagrama trouve ce qui constitue, en langage moderne, le développement de la fonction arc tangente (redécouvert par James Gregory et Gottfried Wilhelm Leibniz au 17e siècle) :

1. Formule de Madhava-Leibniz-Grégory : $\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-...$. Cette formule est moyennement efficace à calculer les décimales de π (cinq décimales seulement pour 500'000 fractions).

2. Formule de Nilakantha : $\pi=3+\frac{4}{2\cdot3\cdot4}-\frac{4}{4\cdot5\cdot6}+\frac{4}{6\cdot7\cdot8}-\frac{4}{8\cdot9\cdot10}+...$. Cette formule due au mathématicien hindou Kelallur Nilakantha Somayaji (1444– 1544) donne 11 décimales pour 10'000 fractions.

3. Au début du 20e siècle, le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan a trouvé de nombreuses nouvelles formules faisant intervenir π ; certaines d'entre elles sont remarquables par leur élégance et leur profondeur mathématique. L'une de ces formules est la série suivante : $\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$

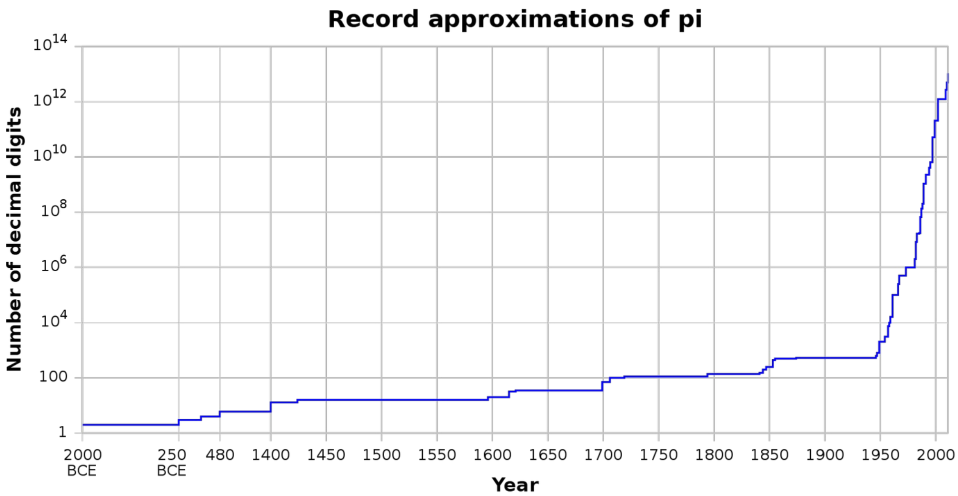
Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 - 1920)

La formule ci-dessous, possédant un lien étroit avec celle énoncée ci-dessus, a été découverte par David et Gregory Chudnovsky en 1987 :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k!)(k!)^3()-640320^{4k}}$$

Cette formule donne 14 nouvelles décimales de π à chaque terme. Vers la fin des années 1980, les frères Chudnovsky l'ont utilisée pour battre plusieurs records de décimales de π calculées. Elle demeure la formule la plus utilisée pour calculer π sur des ordinateurs personnels.

4. Le 21 mars 2022, le nouveau record est 100’000’000’000’000 milliards de décimales (Emma Haruka Iwao). Pour effectuer ce calcul, 158 jours ont été nécessaires avec un ordinateur n2-highmem-128 (128 vCPU and 864 GB RAM) et a nécessité 663 TB pour le stockage !



Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80

Voir la théorie 8 à 11 et les exercices 19 à 31

20 [Activité] Séries entières

1. Définir la notion de **série entière**. Donner des exemples en précisant les notations.

2. Définir la notion de **rayon de convergence** d’une série entière et illustrer.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 5^n}=\frac{x}{5}-\frac{x^2}{2\cdot 5^2}+\frac{x^3}{3\cdot 5^3}-\frac{x^4}{4\cdot 5^4}+\ldots$

Voir la théorie 12 et les exercices 32 à 33

21 [Activité] Approximer des fonctions

On a déjà démontré que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, c'est-à-dire que $\frac{\sin(x)}{x}$ quand x est « proche de 0 ».

a. Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.

b. Représenter sur le même repère la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$. Interpréter $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

c. Représenter sur le même repère la fonction f_2 définie par $f_2(x) = x - 6x^3$. Que constate-t-on ?

d. Représenter sur le même repère la fonction f_3 définie par $f_3(x) = x - 6x^3 + 120x^5$. Que constate-t-on ?

22 [Activité] Développement de fonctions en série entière

1. On considère $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$.

a. Quel est le résultat connu pour cette série géométrique ?

b. Faire le lien avec la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{1-x}$ et les séries entières ?

2. Montrer que le théorème de 3e «Equation de la tangente» peut être interprété comme une **approximation d'ordre 1** d'une fonction dérivable. Illustrer avec les fonctions *sin* et *exp*.

3. Enoncer et illustrer le **théorème de Taylor**

4. Enoncer et illustrer le **théorème de MacLaurin**.

5. Reprendre la fonction sinus et déterminer sa série de Maclaurin. Faire le lien avec l'activité 21.

23 [Activité] Applications avec un outil de calcul

1. Approximer $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$ en utilisant un polynôme de MacLaurin de degré 7. Que peut-on dire de l'erreur commise ?

2. En majorant le reste dans le développement de MacLaurin de la fonction $f(x) = \sin(x)$, déterminer le degré d'un polynôme de MacLaurin qui approxime sin(1) avec une erreur inférieure à 0.000002.

3. Approximer ln(1.5) en utilisant un polynôme de MacLaurin de degré 10.

4. Montrer que l'erreur commise en estimant e avec le polynôme de Taylor d'ordre 4 est plus petite que 0.025.

24 [Aller plus loin] Dériver, intégrer

1. Montrer comment on peut utiliser le développement en série pour approximer π à l'aide de la fonction arctan.

2. Montrer en le dérivant terme à terme puis en résolvant une équation différentielle simple que le développement de MacLaurin de exp est bien égal à exp.

3. Utiliser un polynôme de MacLaurin pour calculer approximativement les intégrales suivantes en estimant l'erreur :

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ **c.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^2)\,dx$

4. En utilisant le développement de $\ln(1+x)$ calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

25 [Aller plus loin] e est irrationnel

En utilisant le développement de e^x, démontrer que e est irrationnel.

26 [Aller plus loin] Etonnant !

1. En permutant les termes d'une série, on peut la faire converger vers n'importe quelle valeur !

2. Il existe des fonctions pour lesquelles le développement en série de Taylor obtenu à partir de la fonction converge bien … mais ne converge par vers cette fonction !

Voir la théorie 13 à 14 et les exercices 34 à 41

Méthodes et notions essentielles

1 [A savoir] Suites et séries arithmétiques

Définition

On appelle **suite arithmétique** - ou **progression arithmétique** - une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant appelé **raison**.
On nomme t_1 le **premier terme** et r la **raison**.
On appelle **série arithmétique** la somme des n premiers termes.

Exemple : donner deux progressions arithmétiques, de raison 4 et -3

–5, –1, 3, 7, 11, 15, 19, ... est de raison = 4

35, 32, 29, 26, 23, ... est de raison = -3

Théorème « Calcul du n-ième terme »

Soit une suite arithmétique de premier terme t_1 et de raison r, alors on a $t_n = t_1 + (n-1) \cdot r$

Exemple : soit la suite arithmétique 4, 10, 16, 22, ... Quel est le 66ème terme ?

$t_1 = 4$, $r = 6$, $n = 66$, donc $t_{66} = 4 + 65 \cdot 6 = 394$

Remarque : Il ne faut pas confondre t_n et n ! En effet, n est le **rang** (ou parfois le nombre d'éléments), t_n est l'élément de rang n. Pour prendre une image, n est le numéro d'un siège de cinéma et t_n est la personne assise dans ce siège ; n est un nombre entier, mais t_n ne l'est pas forcément.

Théorème « Calcul de la somme S_n des n premiers termes »

Soit une suite arithmétique de premier terme t_1 et de raison r, et S_n la somme des n premiers termes $S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + t_n$, alors on a : $S_n = n t_1 + r\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)$

Exemple : calculer la somme S_1 des 100 premiers nombres entiers et la somme S_2 des 38 premiers nombres entiers pairs.

S_1 : $t_1 = 1$, $r = 1$, $n = 100$: $S_1 = S_{100} = 100 \cdot 1 + \frac{99 \cdot 100}{2} = 5050$

S_2 : $t_1 = 2$, $r = 2$, $n = 38$: $S_2 = S_{38} = 38 \cdot 2 + 2\left(\frac{37 \cdot 38}{2}\right) = 1482$

2 [A savoir] Suites et séries géométriques

Définition

On appelle **suite géométrique** - ou **progression géométrique** - une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant appelé **raison**.
On nomme t_1 le **premier terme** et r la **raison**.
On appelle **série géométrique** la somme des n premiers termes.

Exemple : donner deux suites géométriques, de raison 1/3 et -2

27, 9, 3, 1/3, 1/9 , ... est de raison 1/3

3, –6, 12, –24, ... est de raison –2

Méthodes et notions essentielles

Théorème « Calcul du n-ième terme »

Soit une suite géométrique de premier terme t_1 et de raison r, alors on a $t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

Exemple : soit la suite géométrique 4, 8, 16, 32, ... Quel est le 19ème terme ?

$t_1 = 4$, $r = 2$, $n = 19$, donc $t_{19} = 4 \cdot 2^{18} = 1'048'576$

Théorème « Calcul de la somme S_n des n premiers termes »

Soit une suite géométrique de premier terme t_1 et de raison r, et S_n la somme des n premiers termes $S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + t_n$, alors on a : $S_n = t_1 \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

Exemple : que vaut la somme des 10 premières puissances de 3 ?

$t_1 = 3$, $r = 3$, $n = 10$, donc $S_{10} = 3 \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 88572$

Théorème « Comportement à l'infini de la suite géométrique »

Soit une suite géométrique de premier terme t_1 et de raison r, et S_n la somme des n premiers termes :

- ☐ si $|r| < 1$, alors la suite tend vers 0.
- ☐ si $|r| > 1$, alors la suite tend vers l'infini.

Exemple : étudier le comportement à l'infini de $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16} ; \ldots$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Théorème « Comportement à l'infini de la série géométrique S_n »

Soit une suite géométrique de premier terme t_1 et de raison r, et S_n la somme des n premiers termes :

- ☐ si $|r| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{t_1}{1 - r}$.
- ☐ si $|r| > 1$, la série tend vers l'infini.

Exemple : calculer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Voir les exercices 1 à 9

3 [A savoir] Suites numériques

Définition

Quand à tout entier positif n on associe un nombre réel s_n, on parle de **suite (infinie)** (de nombres).
On note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,\ldots)$
u_n est appelé **terme général de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le nombre s_k est appelé **le *k*-ième terme de la suite**.

Remarque : il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec l'ensemble des valeurs de la suite $\{u_n|n\in\mathbb{N}\}$.

Exemple : déterminer l'ensemble des valeurs de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}=\{1,-1,1,-1,\ldots\}$

L'ensemble des valeurs est $\{-1, 1\}$

Remarques :

☐ une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$;

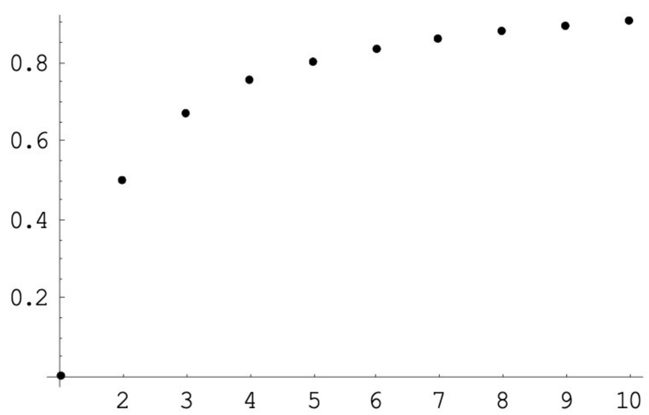
☐ contrairement à ce qu'on fait généralement avec les les progressions, on commence souvent la numérotation des termes d'une suite à 0 avec a_0 :

☐ on parle de **suite entière**, **suite réelle** ou **suite complexe** quand tous les termes appartiennent à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

☐ une suite peut être déterminée de plusieurs manières :

- par la liste de tous ses termes s'il n'y a pas de règle de formation exemple : (5, 18, 24, 11, ...) ;
- par une formule qui donne un par rapport à n (donner f (n) = un) exemple : $u_n=n^2\Rightarrow(0,1,4,9,16,\ldots)$
- par récurrence : le deuxième terme de la suite est donné en fonction du premier, le troisième en fonction du deuxième, et ainsi de suite exemple : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n+1 \end{cases} \Rightarrow(2,5,11,23,\ldots)$

On peut aussi représenter une suite sur un dessin ; par exemple $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$



Définitions

☐ Une suite est **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
☐ Une suite est **décroissante** si $u_n \geq u_{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
☐ Une suite est **strictement croissante** si $u_n < u_{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
☐ Une suite est **strictement décroissante** si $u_n > u_{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
☐ Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.
☐ Une suite est **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.
☐ Une suite est **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq M$;
M s 'appelle le **majorant**.
☐ Une suite est **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $m \leq u_n$;
m s'appelle le **minorant**.
☐ Une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Méthode

Pour déterminer si une suite u_n est croissante ou décroissante, il faut étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$ ou comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Exemple : soit la suite $u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-elle (dé)croissante ? strictement (dé)croissante ?

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{(n+1)+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$$

donc u_n est strictement croissante

4 [A savoir] Convergence d'une suite

Définition

Une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement si il existe un nombre réel s tel que

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\geq 1 \text{ tel que } \forall n\geq N \text{, on a : } |s_n-s|<\varepsilon$$

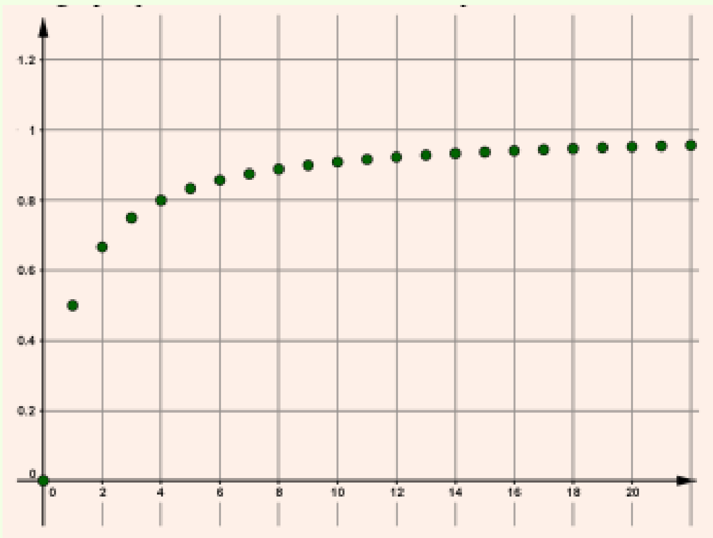
On note alors $\lim_{n\to+\infty} s_n=s$ (ou $s_n\to s$).

S'il n'existe pas de tel s, on dit que la suite **diverge**.
Le suite peut soit **diverger vers +∞ ou -∞**, soit **osciller**.

Exemples : les suites $(1,-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots)$ et $(1,-2,3,-4,5,\ldots,(-1)^n\cdot n,\ldots)$ oscillent ; la suite $(-1,-2,-3,-4,-5,\ldots,-n,\ldots)$ diverge vers -∞.

Exemple : soit la suite $\left(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots\right)$, où $s_n=\frac{n}{n+1}$. Représenter graphiquement la suite, puis déterminer la valeur de $N\in\mathbb{N}$ telle que $|s_n-1|<0{,}1,\forall n\geq N$ puis $|s_n-1|<0{,}01,\forall n\geq N$. Montrer enfin que cette suite converge vers 1.

Une représentation graphique de cette suite est donnée par :



$$|s_n - 1| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}1} < n+1 \Leftrightarrow 10-1 < n \Leftrightarrow 9 < n$$

cela signifie que sur le graphe, dès que $n>9$, l'écart entre les valeurs de la suite et 1 devient strictement inférieur à 0,1

$$|s_n - 1| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}01} < n+1 \Leftrightarrow 100-1 < n \Leftrightarrow 99 < n$$

cela signifie que sur le graphe, dès que $n>99$, l'écart entre les valeurs de la suite et 1 devient strictement inférieur à 0,01

soit ε > 0 donné (penser qu'on le souhaite très petit) ;

on veut | $|s_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

on choisit donc $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ (la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$), et on a bien : $\forall n \geq N, |s_n - 1| < \varepsilon$

cela signifie que sur le graphe, si on souhaite que l'écart entre les valeurs de la suite et 1 devienne strictement inférieur à un ε donné (très petit) ,il faut choisir $n > [\frac{1}{\varepsilon}]$

Théorème

☐ Toute suite monotone et bornée converge.
☐ Toute suite convergente est bornée.

Théorème

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = v$.

Alors on a : $\lim_{n \to +\infty} s_n + v_n = s + v$, $\lim_{n \to +\infty} s_n \cdot v_n = s \cdot v$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{v_n} = \frac{s}{v}$ (pour $v_n \neq 0$ et $v \neq 0$¿

Voir les exercices 10 à 16

5 [A savoir] Séries numériques

Définition

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle $\{u_0\,; u_1\,; u_2\,; \ldots\,; u_n\,; \ldots\}$.
À cette suite, nous associons une nouvelle suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :
$s_0 = u_0$
$s_1 = u_0 + u_1$
$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$
$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
La suite (s_n) est appelée **série numérique** de **terme général** u_k.
Le terme s_n est la **n-ième somme partielle** de la série (comprenant les $n+1$ premiers termes de la suite).
On note la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Remarque : il n'y a pas de convention claire qui dit si l'indice du premier terme est 0 ou 1 ; on écrit l'un ou l'autre suivant les circonstances.

Exemple : écrire la série de terme général $\frac{1}{k}, k\in\mathbb{N}^*$ et sa n-ième somme partielle.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots \quad \text{et} \quad s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

Définition

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$ est appelée **série harmonique**.

Remarque : on peut écrire indistinctement $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (par contre $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ est différente!).

6 [A savoir] Convergence d'une série

Définition

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ une série.

Si la suite $(s_n)=\sum_{k=0}^{n} u_k=u_1+u_2+\ldots+u_n$ converge, on dit que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ **converge**, ou qu'il s'agit d'une **série convergente** ; dans ce cas, la limite de la suite $\lim_{n\to\infty} s_n$ s'appelle **somme de la série** et on la note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Une série qui ne converge pas **diverge**.

Remarque : calculer la somme exacte d'une série est, en général, une tâche difficile. Voilà pourquoi nous allons nous intéresser à des tests qui permettent de savoir si une série est convergente ou divergente, sans en calculer explicitement la somme.

Théorème « Divergence de la série harmonique »

La série harmonique. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}+...$ diverge.

Remarque : la première démonstration de la divergence de la série harmonique est due à Nicole Oresme parue dans « Questiones super geometriam Euclidis » en 1360.

Remarques :

☐ si $\sum_{k=i}^{\infty}u_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ (ou $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ ou...) converge aussi ; le fait qu'une série converge ou non de dépend pas des premiers termes (quel que soit le nombre fini de ces premiers termes) ;

☐ souvent, on peut récrire une série pour se ramener à un cas connu ; par exemple,

7 [A savoir] Quelques séries de référence

☐ Les séries géométriques $\sum_{n=0}^{+\infty}a\cdot r^n=a\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}r^n=S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}$, convergent vers $\frac{1}{1-r}\Leftrightarrow|r|<1$

☐ La série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge

☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge vers 1

☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge vers $s\le 2$ (en fait vers $\frac{\pi^2}{6}$)

☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ converge vers $s\le 3$ (en fait vers e)

Voir les exercices 17 à 18

8 [A savoir] Un premier critère

Théorème « Critère de divergence »

Soit $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ une série.

Si $\lim_{k\to\infty}|u_k|\neq 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ est divergente.

Contraposée : Si la série $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ est convergente, alors $\lim_{k\to\infty}|u_k|=0$.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k^2+1}$ converge-t-elle ?

$\lim_{k\to\infty} |u_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2}{k^2+1} = 3$, donc la série diverge

Remarque : la réciproque n'est en général pas vraie : Si $\lim_{k\to\infty} |u_k| = 0$, on ne peut pas conclure que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge. Contre-exemple : la série harmonique ; en effet, on a le

9 [A savoir] Séries alternées

Définition

Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Théorème « Critère de convergence d'une série alternée »

Soit une série alternée $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ où $b_k \geq 0$ telle que :

☐ $0 < b_{k+1} < b_k$, $k \in \mathbb{N}$
☐ $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

alors la série est convergente.

Exercice : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ converge-t-elle ?

On applique le critère ; on a : $b_k = \frac{1}{k} \geq 0$, $0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ et $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

10 [A savoir] Séries à termes positifs

Théorème « Critère de comparaison »

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ soient des séries à termes positifs.

☐ si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente et $u_k \leq v_k, \forall k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.
☐ si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est divergente et $u_k \geq v_k, \forall k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Remarque : l'emploi du critère de comparaison est subordonné à la connaissance d'un certain nombre de séries $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ qui servent de repère.

Exercice : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge-t-elle ?

On a :

☐ $\frac{1}{k!} \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$

☐ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots 2 \cdot 2$, donc $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

on utilise le critère de comparaison avec la série $\sum_{k=1}^{\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

et on obtient : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 2$

Définition

Une **série de Riemann** est une série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorème « Convergence des séries de Riemann »

Une série de Riemann diverge si $a \leq 1$ et converge si $a > 1$.

Exercice : les séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ convergent-elles ?

On applique le théorème :

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann pour $a = 1$; donc elle diverge.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann pour $a = 2$; donc elle converge.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann pour $a = 0.5$; donc elle diverge.

Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ à termes positifs, càd $u_k \geq 0, \forall k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c$.

☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783)

Exercice : appliquer le critère du quotient à la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ et à la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

☐ $c = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1$: il y a doute...

☐ $c = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{k+1} \right| = 0$: la série est convergente.

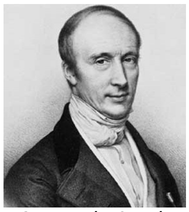
Théorème « Critère de la racine (ou critère de Cauchy) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ <u>à termes positifs</u>, càd $u_k \geq 0, \forall k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{u_k} = c$.

☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.



Augustin Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Exercice : appliquer le critère de la racine à la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$

$c = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$: la série est convergente.

Théorème « Critère de l'intégrale »

Soit f une fonction continue, positive et jamais croissante dans l'intervalle $[p; +\infty[$ et soit $u_k = f(k)$. Alors la série $\sum_{k=p}^{\infty} u_k$ converge ou diverge, selon que $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou non.

De plus : $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=p}^{\infty} u_k \leq u_p + \int_p^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice : appliquer le critère de l'intégrale à la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

La fonction est $f(x) = \frac{1}{x}$ et $p=1$. On a $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln(t)) - \ln(1) = +\infty$: la série est divergente.

Exercice : appliquer le critère de l'intégrale à la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

La fonction est $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $p=1$. On a $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$: la série est convergente et comprise entre 1 et 2.

11 [A savoir] Convergence absolue

Définition

Une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dite **absolument convergente** lorsque la série des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ est convergente.

Théorème « Critère de convergence absolue »

Si une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exercice : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ converge-t-elle ?

Selon le critère : $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ qui converge (Act.9), donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ converge.

Remarque : la réciproque est fausse ; la série harmonique est un contre-exemple.

Remarque : avec ce théorème, on peut récrire les critères du quotient et de la racine de la façon suivante :

Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ (quelconque) et la limite $\lim_{k \to \infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = c$.

- ☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.
- ☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.
- ☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Théorème « Critère de la racine (ou critère de Cauchy) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|u_k|} = c$.

- ☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.
- ☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.
- ☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Voir les exercices 19 à 31

12 [A savoir] Séries entières

Définition

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et la limite $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|u_k|}=c$.

Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ où x est une variable et les ak sont des constantes, appelées les **coefficients** de la série. Chaque fois qu'une valeur est attribuée à x, la série entière est une série de constantes qui peut être testée quant à sa **convergence** ou à sa **divergence**.

La fonction f définie par $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ a comme domaine de définition l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge.

Remarque : f ressemble à un polynôme, mais avec un nombre infini de termes.

Théorème

Il existe un nombre positif r, appelé **rayon de convergence** de la série, tel que :

- ☐ la série entière converge absolument si $|x| < r$
- ☐ la série entière diverge si $|x| > r$

Remarque : dans la plupart des cas, le rayon de convergence peut être déterminé par le test du quotient, mais ce test échoue toujours quand $x|$est l'une des extrémités de l'intervalle de convergence. Il faut donc un autre test pour savoir ce qui se passe aux extrémités.

Méthode pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière

Étape 1 : calculer $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=c$ ou $\lim_{k\to\infty}\left|\sqrt[n]{u_k}\right|=c$

Étape 2 : calculer le rayon de convergence r de la série
Nous savons alors que :

- ☐ la série entière converge si - $r < x < r$
- ☐ la série entière diverge sinon.

Étape 3 : étudier la convergence de la série entière quand x = -r et $x = r$.

Étape 4 : écrire le résultat final.

Exemple: déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-3^k x^k}{\sqrt{k+1}}$

Test du quotient

- $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{-3^{k+1}x^{k+1}}{\sqrt{k+3}}\right|\left|\frac{\sqrt{k+1}}{-3^k x^k}\right|=\lim_{k\to\infty} 3\left|\sqrt{\frac{k+1}{k+3}}\right||x|=3|x|$

- la série est donc convergente si $3|x| < 1$ et divergente pour $3|x| > 1$.

Rayon de convergence : la série entière converge donc pour $|x|<\frac{1}{3}$ et diverge pour $|x|>\frac{1}{3}$. Cela signifie que le rayon de convergence est $|x|=\frac{1}{3}$.

Maintenant que l'on sait la série converge dans l'intervalle $]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}[$, on regarde ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle :

si $x=-\frac{1}{3}$: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-3^k\left(-\frac{1}{3}^k\right)}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, qui est divergente (déjà vu) ;

si $x=\frac{1}{3}$: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-3^k\left(\frac{1}{3}^k\right)}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$, qui est convergente (cf critère séries alternées).

Voir les exercices 32 à 33

13 [A savoir] Développement des fonctions en séries entières

On fait l'hypothèse que f est une fonction quelconque qui peut être écrite sous la forme d'une série entière : $f(x)=c_0+c_{1x}+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\ldots, \forall |x-a|<r$.

On essaye de déterminer comment doivent être les coefficients en termes de *f*. On remarque qu'en posant $x = a$ dans l'équation ci-dessus, tous les termes après le premier sont nuls et il ne reste que $f(a) = c_0$.

Dérivons la série ci-dessus terme à terme :

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\ldots, \forall |x-a|<r$$

on pose $x = a$ et on obtient : $f'(a) = c_1$

on dérive une deuxième fois : $f''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)^2+\ldots, \forall |x-a|<r$

on pose $x = a$ et on obtient : $f''(a) = 2c_2$

dérivons une troisième fois : $f^{(3)}(x)=2\cdot 3c_3+2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)+3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2+\ldots, \forall |x-a|<r$

on pose $x = a$ et on obtient : $f^{(3)}(a)=2\cdot 3c_3$

La régularité est claire : si nous continuons à dériver et à faire la substitution $x = a$, nous obtiendrons $f^{(k)}(a)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k\cdot c_k$, c'est-à-dire $c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Sous certaines conditions, on peut généraliser ce processus : c'est le théorème de Taylor.

Théorème « Série de Taylor »

Si f est une fonction qui est $(n+1)$-fois continument dérivable [c'est-à-dire si elle est $(n+1)$-fois dérivables et que toutes ces dérivées sont continues] sur un intervalle ouvert I et si $a \in I$, alors on a $\forall\, x \in I$:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$, le **développement de Taylor d'ordre *n***

où

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

et

$$|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|\le \underset{t\in[a\,;x]}{Max}\, f^{(n+1)}(t)\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou (autre résultat) : $|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|=\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt$ (forme intégrale)

$R_n(x)$ est le **reste** où **l'erreur d'ordre *n***

De plus, si f est indéfiniment dérivable et si $\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0,\ \forall\, x\in I$ (le reste tend vers 0), alors on obtient :

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots,\ \forall\, x\in I\end{aligned}$$

le **développement illimité de Taylor**, par opposition au développement limité que est un polynôme de degré fini.

Brook Taylor (1685 – 1731)

Théorème « Série de MacLaurin »

Dans le cas particulier où $a=0$ (un cas qui se présente extrêmement souvent), on parle de **série de Maclaurin** :

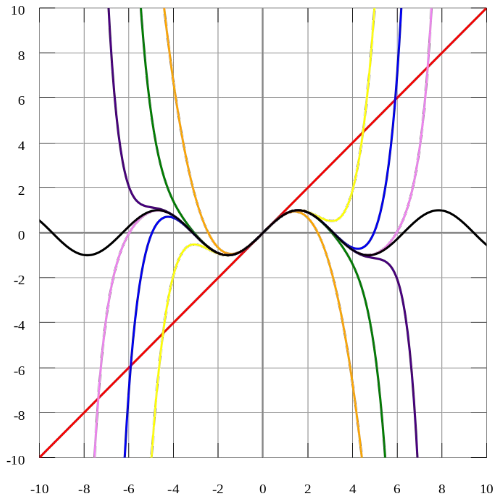
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$

et $f(x)=f(a)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2++\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots,\ \forall\, x\in I$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Colin Maclaurin (1698 - 1746)

L'image ci-contre montre la courbe représentative de sin (en noir) et les approximations par les polynômes de Maclaurin selon les degrés 1, 3, 5, 7, 9, 11 et 13.



Plus le degré du polynôme de Taylor augmente, plus sa courbe se rapproche de la courbe de la fonction sin. On voit que plus on s'éloigne de 0, plus la qualité de l'approximation se détériore.

Remarque : il est important d'étudier et de contrôler le reste, car il existe des exemples où la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ converge ... mais pas vers $f(x)$! Il s'agit donc de s'assurer que le reste tend bien vers 0.

14 [A savoir] Démonstration de la formule d'Euler

La formule $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ a été utilisée dans le cours consacré aux nombres complexes. Elle est connue sour le nom de **formule d'Euler.**


Leonhard Euler (1701-1783)

Le développement en série de la fonction exp de la variable réelle x peut s'écrire : $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+...$.

On peut l'étendre à tout nombre complexe z : ce développement en série de Taylor complexe reste absolument convergent et définit l'exponentielle complexe (tout ceci sans justification ici ...).

En particulier pour $x = i\theta$ avec θ réel, on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+...+\frac{(i\theta)^k}{k!}+... \\ &= 1+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+...+\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!}+..............+i\theta+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+...+\frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}+... \\ &= 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+...+(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}+..............+i\theta-i\frac{\theta^3}{3!}+i\frac{\theta^5}{5!}+...+i(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+... \end{aligned}$$

on voit apparaître les développements en série de Taylor des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(\theta)=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+...+(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}+... \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\theta+\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+...+(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+...$$

ce qui donne bien : $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

Rappel : En posant $\phi=\pi$, on obtient ce que beaucoup considèrent comme la plus belle formule des mathématiques : $e^{i\pi}+1=0$

Voir les exercices 34 à 41

Exercices d'entraînement

Suites et séries arithmétiques et géométriques

1 Calculer la somme de tous les multiples de cinq compris entre 101 et 1001.

2 Insérer huit termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.

3 Soit une progression géométrique avec $t_1=8$ et $t_3=18$. Calculer t_{10}.

4 Lorsque vous placez un capital C à la banque, au taux d'intérêt annuel i, votre capital est accru chaque année des intérêts de l'année. Il s'élève donc :

- au bout d'un an à $C_1 = C(1+i)$
- au bout de deux ans à $C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)^2$ etc.
- au bout de n années, $C_n = C(1+i)^n$

a. Si vous placez 2500 fr. le 1er janvier 1999 à un taux d'intérêt de 3 %, quel sera votre capital le 1er janvier 2063 ?

b. Un 1er janvier, vous constatez que votre capital se monte à 5234.45 fr. En quelle année êtes-vous ?

5 Calculer la somme $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \ldots$

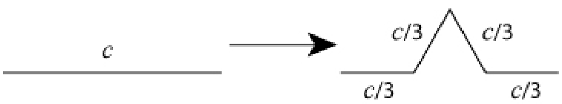
Indication : Calculer d'abord $9 \cdot S_n$ puis extraire une progression géométrique.

6 Dans un carré de 10 cm de côté, on inscrit un cercle. Puis dans ce cercle on inscrit un carré, puis dans le nouveau carré un cercle, etc. On construit ainsi une infinité de carrés. Quelle est la somme des aires des carrés ?

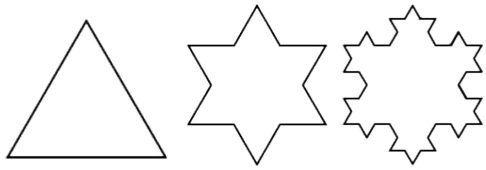
7 Soit $S_n = 1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^6}+\ldots$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Indication : calculer d'abord $S_n - \frac{1}{4} S_n$ ...

8 Le « flocon de neige » de von Koch est une figure fractale qui se construit de manière itérative. En partant d'un triangle équilatéral, on remplace chaque côté par :



Voici les figures obtenues après 0, 1 et 2 itérations du processus :



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a. que vaut le périmètre du flocon si le côté du triangle équilatéral initial a une longueur c ?

b. que vaut l'aire du flocon ?

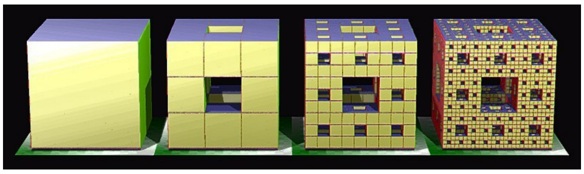
Information : le flocon de von Koch a une dimension de $\frac{\ln(4)}{\ln(3)} \simeq 1.262$!

9 La construction d'une « éponge de Menger » peut être décrite de la manière suivante :

- débuter par un cube,
- réduire le cube au tiers et en faire 20 copies,
- placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales,
- répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.

Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

À chaque itération, on multiplie le nombre de cubes par 20, ce qui fait que le solide créé à l'itération n contient 20 n cubes.



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini, que vaut l'aire de l'éponge de Menger si le côté du cube initial a une longueur c ?

On peut montrer que son volume tend vers 0 !

La structure des poumons se rapproche d'une éponge de Menger.

Information : L'éponge de Menger a une dimension de $\frac{\ln(20)}{\ln(3)} \simeq 2.727$!

Voir la théorie 1 à 2

Exercices d'entraînement

Suites

10 Donner les quatre premiers termes des suites définies par leur terme général :

a. $s_n=\frac{2^n}{n+1}$ **b.** $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ **c.** $v_n=\frac{(2n)!}{n!}$

11 Déterminer le terme général des suites suivantes :

a. $(1,4,9,16,25,\ldots)$ **c.** $(1,0,1,0,1\ldots)$

b. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\ldots\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ldots\right)$

12 Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ou alternées, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

a. -1,1,-1,1,... **d.** 2,2,2,2,...

b. $u_n=\frac{3n-1}{5n-2}$ **e.** $u_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

c. $u_n=\frac{n}{n^2+1}$ **f.** $u_n=\frac{5n-1}{3n-2}$

13 Déterminer si les suites ci-dessous sont minorées, majorées, ou bornées, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

a. $u_n=\frac{n-1}{n+1}$ **d.** $u_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

b. $u_n=\frac{1}{n}$ **e.** $u_n=\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

c. $u_n=n$ **f.** $u_n=|(-3)^n-2|$

14 Soit la suite de terme général $s_n=\frac{2}{n}, n\geq 1$ Trouver pour cette suite la valeur de $N\in\mathbb{N}$ telle que :

a. $|s_n|<0{,}1\,,\ \forall n\geq N$

b. $|s_n|<0{,}01\,,\ \forall n\geq N$

c. Montrer qu'elle converge vers s = 0 en utilisant la définition formelle de convergence.

d. Interpréter avec GeoGebra.

15 Soit la suite définie par $s_n=\frac{2n-1}{n+3}$.

Trouver la valeur de $N\in\mathbb{N}$ telle que :

a. $|s_n-2|<0{,}1\,,\ \forall n\geq N$

b. $|s_n-2|<0{,}05\,,\ \forall n\geq N$

c. $|s_n-2|<0{,}001\,,\ \forall n\geq N$

d. Démontrer qu'elle converge vers s = 2 en utilisant la définition formelle de convergence.

e. Interpréter avec GeoGebra.

16 Utiliser le calcul de limite connu pour déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non ($n\in\mathbb{N}^*$)?

a. $u_n=\frac{n^2+1}{n^2+n-1}$ **b.** $u_n=\frac{n^4+2n+2}{n+4}$

c. $u_n=\frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$

Voir la théorie 3 et 4

Séries

17 Écrire la troisième somme partielle des séries suivantes :

a. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(k+1)^2}$ **b.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{k+1}}{k!}$

18 Donner une expression du terme général des séries suivantes :

a. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

b. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

c. $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{7}{10}+\frac{10}{14}+\ldots$

d. $\frac{4}{10}+\frac{9}{17}+\frac{16}{26}+\frac{25}{27}+\frac{36}{50}+\ldots$

e. $\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$

Voir la théorie 5 à 7

Critères de convergence

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$ converge-t-elle ?

20 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3k}{4k-1}$ converge-t-elle ?

21 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+1}$ converge-t-elle ?

Exercices d'entraînement

22 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2}$ converge-t-elle ?

23 Les séries suivantes convergent-elles ?

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$

b. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

d. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

e. $\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\ldots$

f. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$

g. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

24 Les séries suivantes convergent-elles ?

a. $\displaystyle\sum_{n=10^{10}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b. $\displaystyle\sum_{k=10^{10}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c. $\displaystyle\sum_{k=10^{10}}^{\infty} \frac{\pi}{(k+1)^2}$

d. $\displaystyle\sum_{n=10^{10}}^{\infty} \frac{\pi}{n^2+1}$

25 La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ converge-t-elle ?

26 Utiliser le critère du quotient pour dire si les séries suivantes convergent :

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

27 Utiliser le critère de la racine pour dire si les séries suivantes convergent :

a. $\frac{1}{180}+\frac{1}{120}+\frac{1}{80}+\ldots+\frac{3^n}{180\cdot 2^n}+\ldots$

b. $\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n+\ldots$

28 Utiliser le test de l'intégrale pour déterminer si ces séries convergent :

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\ldots$

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{4\cdot n^2}+\ldots$

c.

$\sin(\pi)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\ldots+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\ldots$

d. $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots$

29 Les séries suivantes, de terme général u_k, $k\in\mathbb{N}^*$, convergent-elles ?

a. $u_k=\frac{1}{(k+1)^2-1}$

b. $u_k=(-1)^{k+1}\frac{k^2}{2k^2+1}$

c. $u_k=\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$

d. $u_k=\frac{k^3}{e^k}$

e. $u_k=(-1)^{k+1}\frac{k!}{2^k+1}$

f. $u_k=\frac{k!}{10^k}$

g. $u_k=\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$

h. $u_k=\frac{2^{k-1}}{\sqrt{k}}$

i. $u_k=\sqrt[k+1]{10}$

j. $u_k=\frac{1}{10^k+1}$

k. $u_k=\frac{(k+1)!}{3^{k+2}+7}$

30 Les séries suivantes, de terme général u_k, $k\in\mathbb{N}^*$, convergent-elles ?

a. $u_k=\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

b. $u_k=\left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$

c. $u_k=\frac{1}{\ln(k)}, k\geq 2$

d. $u_k=\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

e. $u_k=\frac{k+1}{k\sqrt{3k-1}}$

f. $u_k=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

g. $u_k=\frac{\ln(k)}{k^3}$

Exercices d'entraînement

31 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier soigneusement chaque réponse.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

c. Si $a_n>0, \forall k$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

d. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n+2}{a_n+3}$ converge.

e. Si $a_n>0, \forall k$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$ converge.

f. Soit s_n la suite des sommes partielles d'une série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|=L\in\mathbb{R}$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolument.

g. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Voir la théorie 8 à 11

32 Etudier la convergence des séries entières ci-dessous :

a. $\sum\limits_{n\geq 0} (2^n+1)x^n$

b. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^n}x^n$

c. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3}{(n+1)^n}x^n$

d. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

33 Trouver l'intervalle de convergence des séries entières suivantes :

a. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots$

b. $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

c. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

d. $\left(\dfrac{x}{\ln(2)}\right)^2+\left(\dfrac{x}{\ln(3)}\right)^3+\left(\dfrac{x}{\ln(4)}\right)^4+\ldots$

Voir la théorie 12

34 Déterminer la série de Maclaurin des fonctions suivantes ainsi que le rayon de convergence :

a. $f(x)=e^x$

b. $f(x)=\ln(1+x)$

c. $f(x)=\cos(x)$

35 Dans les deux cas ci-dessous :

A : $f(x)=\ln(2x+5)$ avec $n=5$, $a=0$ et $I=[-2;2]$

B : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+4$ avec $n=4$, $a=-2$ et $I=[-3;-1]$

a. Donner le développement de Taylor d'ordre n au voisinage de a

b. Utiliser un traceur de courbes pour visualiser la qualité des approximations (GeoGebra ou Desmos).

c. Donner une estimation de l'erreur maximale commise lorsque cette approximation est donnée dans l'intervalle I.

36 Soit la fonction $f(x)$ = ln(x). Calculer les polynômes de degrés 1, 2, 3, 4 et 5 qui approchent au mieux cette fonction autour de a = 1. Utilisez GeoGebra pour visualiser les résultats.

37 Donner, en utilisant le symbole $\sum$, les séries de Taylor des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\dfrac{1}{4x}$, $a=5$

b. $f(x)=\cos(2x)$, $a=\dfrac{\pi}{4}$

38 Estimer la valeur du nombre e grâce aux séries. Qu'en est-il de la vitesse de convergence ?

39 Approcher ln(1.1), grâce à une série de Maclaurin, avec cinq chiffres significatifs.

Indication : on peut montrer que si on a une série alternée convergente, alors $|R_n|<b_{n+1}$.

40 Calculer π avec trois décimales exactes, en utilisant un développement limité de arcsin et l'égalité $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Voir la théorie 13 à 14

1 *Algorithme d'Héron*

Héron d'Alexandrie, savant grec du 1er siècle après J.-C., a inventé un algorithme qui permet de s'approcher très vite de la racine carrée d'un nombre réel m positif, en itérant la formule récursive :

$$\begin{cases} u_0 & = & m \quad (m>1) \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{m}{u_n}\right) \end{cases}$$

Illustrer.

2 *Suite logistique*

La suite logistique modélise des situations d'équilibre. On la retrouve en particulier dans les systèmes proies-prédateurs pour étudier l'évolution des populations d'animaux. Elle illustre aussi pourquoi les invasions de criquets (Argentine en 2016, Russie en 2015, Madagascar en 2013, etc.) sont complètement imprévisibles.

Elle est définie ainsi : $\begin{cases} u_0 & \in &]0\,;1] \\ u_{n+1} & = & f_a(u_n) \end{cases}$, où

$f_a(x)=ax(1-x), \quad a\in]0\,;4]$

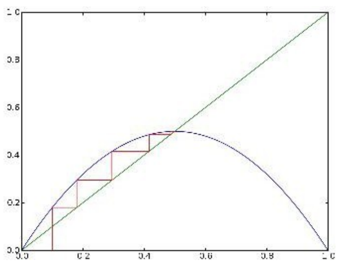
Dans le modèle logistique, nous considérerons que la variable, notée ici un, désigne le rapport de la population d'une espèce sur la population maximale de cette espèce (c'est un nombre compris entre 0 et 1). En faisant varier le paramètre a, plusieurs comportements complètement différents sont observés.

Cas $0\leq a\leq 1$: la population s'éteint.

L'espèce finira par mourir, quelle que soit la population de départ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Cas $1\leq a\leq 3$: l'effectif de la population se stabilise.

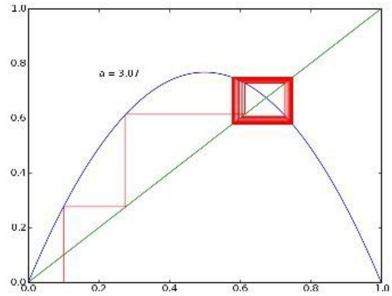
- Si $1\leq a\leq 2$, la population finit par se stabiliser autour de la valeur $\frac{a-1}{a}$ quelle que soit la population initiale. Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{a-1}{a}$



- Si $2\leq a\leq 3$, elle finit également par se stabiliser autour de $\frac{a-1}{a}$ après avoir oscillé autour pendant quelque temps. La vitesse de convergence est linéaire, sauf pour a = 3 où elle est très lente.

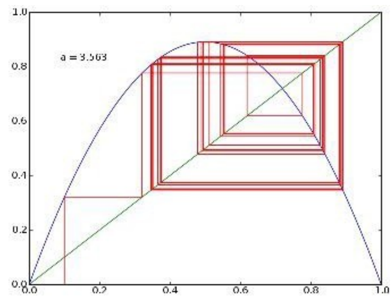
Cas $3\leq a\leq 3.57$: l'effectif de la population oscille entre 2, 4, 8, …, 2^k valeurs.

- Si $3<a\leq 1+\sqrt{6}$ (environ 3.45), elle finit par osciller entre deux valeurs, dépendantes de a mais pas de la population initiale.



- Si $3.45<a<3.54$ (environ), elle finit par osciller entre quatre valeurs, là encore dépendantes de a mais pas de la population initiale.
- Si a est légèrement plus grand que 3.54, la population finit par osciller entre huit valeurs, puis 16, 32, etc. L'intervalle des valeurs de a conduisant au même nombre d'oscillations décroît rapidement. Le rapport entre deux de ces intervalles consécutifs se rapproche à chaque fois de la constante de Feigenbaum, δ = 4,6692016091029906718532038…

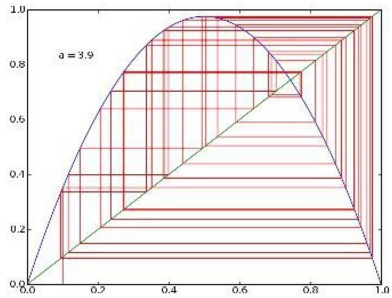
  Aucun de ces comportements ne dépend de la population initiale.



Cas $3.57\leq a$: l'effectif de la population est chaotique, sauf exception.

- Vers a=3.57, le chaos s'installe. Aucune oscillation n'est encore visible et de légères variations de la population initiale conduisent à des résultats radicalement différents.

- La plupart des valeurs au-delà de 3.57 présentent un caractère chaotique, mais il existe quelques valeurs isolées de a avec un comportement qui ne l'est pas. Par exemple à partir de 1+√8 (environ 3.82), un petit intervalle de valeurs de a présente une oscillation entre trois valeurs et pour a légèrement plus grand, entre 6 valeurs, puis 12, etc. D'autres intervalles offrent des oscillations entre 5 valeurs, etc. Toutes les périodes d'oscillation sont présentes, là encore indépendamment de la population initiale.



- Au-delà de a=4, la population quitte l'intervalle [0 ; 1] et diverge quasiment pour toutes les valeurs initiales.

Vous pouvez utiliser la page web https://www.geogebra.org/m/wCjHPYDU pour visualiser les comportements décrits ci-dessus.


Mitchell Feigenbaum
(1944-2019)

Les nombres de Feigenbaum ou constantes de Feigenbaum sont deux nombres réels découverts par le physicien Mitchell Feigenbaum en 1975. Tous deux expriment des rapports apparaissant dans les diagrammes de bifurcation de la théorie du chaos.

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon. Des différences infimes dans les conditions initiales (comme des erreurs d'arrondi dans les calculs numériques) entraînent des résultats totalement différents pour de tels systèmes, rendant en général toute prédiction impossible à long terme.

3 *Suite de Syracuse*

Au début des années 1930, un mathématicien de l'université de Hambourg, Lothar Collatz, proposa de créer des suites de nombres de la manière suivante (que l'on appelle algorithme de Collatz) :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \in \mathbb{N}^* \\ u_{n+1} & = & \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 3u_n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{cases}$$

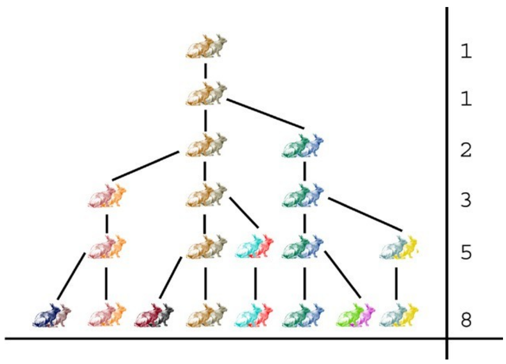
La conjecture de Syracuse dit que cette suite se termine toujours par le cycle 4, 2, 1. Il n'existe pour l'instant aucune démonstration (sinon ce serait un théorème)

Cette conjecture est appelée conjecture de Syracuse ou problème de Syracuse depuis que Helmut Hasse, un ami de Collatz, la présenta à l'université de Syracuse (près de New York) dans les années 50.

4 *Suite de Fibonacci*

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante). Notons $F(n)$ le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce que l'on note : $F(1)=F(2)=1$).



Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors $F(3)=2$.

Leonardi Pisano (Léonard de Pise), dit Fibonacci, 1170-1241 (dates approximatives)

Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: $F(n+2)$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés.

Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif : $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$.

On choisit alors de poser $F(0)=0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n=0$.

On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci :

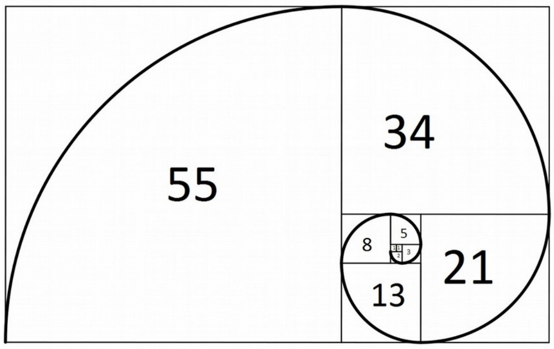
F(n) = $F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2)$, avec $n > 1$ et $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$

Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci (suite A000045 de l'OEIS) :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, ...

Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci :

- les pommes de pins (pives)
- les ananas
- les tournesols
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le nombre de pétales des fleurs
- ...



Spirale de Fibonacci

« Il m'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie,... pas du tout ! » ... Vous connaissez ce petit jeu qui consiste à effeuiller la marguerite. Vous noterez qu'il est très rare de tomber sur « pas du tout ». Pour quelle raison ?

Car « pas du tout »survient si la marguerite comporte 6, 12 ou 18 pétales, ce qui est peu courant. Pas impossible, mais extrêmement rare. Il est même tout aussi rare qu'elle en comporte 9. Il se trouve que le nombre de pétales d'une marguerite suit les nombres de la suite de Fibonacci.

Schématiquement, c'est le meilleur compromis pour obtenir le meilleur ensoleillement. L'ensoleillement doit être maximum pour toutes les feuilles et on démontre que l'angle de deux feuilles consécutives doit être voisin d'un certain rapport, rapport inverse des fractions des nombres de la suite de Fibonacci.

C'est la même raison qui fait qu'il est si rare de trouver un trèfle à 4 feuilles, car 4 ne fait pas partie de cette suite. En revanche, il existe beaucoup de fleurs avec 5 pétales, comme la pensée, le delphinium en a 8, le souci 13, et la chicorée 21 ; et si on avance dans la suite, les tournesols ont souvent 55 ou 89 pétales.

Le web regorge d'images de spirales de Fibonacci :

Entrer « Fibonacci nature » dans votre moteur de recherche préféré.

Vers quel nombre converge $\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}$?

5 Suite de Conway

La suite de Conway a été inventée en 1986 par le mathématicien John Horton Conway, initialement sous le nom de « suite audioactive ». Elle commence par :

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

Les principales propriétés de cette suite sont :

- aucun terme de la suite ne comporte un chiffre supérieur à 3 ;
- tous les termes de la suite possèdent un nombre pair de chiffres, sauf le terme initial ;
- les termes de rang impair se terminent par 21 et les termes de rang pair par 11 (là encore à l'exception du terme initial) ;
- en moyenne, les termes de la suite possèdent 50 % de chiffres 1, 31 % de 2 et 19 % de 3.

Le premier nom de cette suite pourra vous aider à trouver la logique. En 1992, Bernard Werber publie « le jour des fourmis », deuxième épisode de sa célèbre trilogie des fourmis. On y trouve la suite de Conway.

Quel est le terme suivant de cette suite ?

6 Utilité des suites

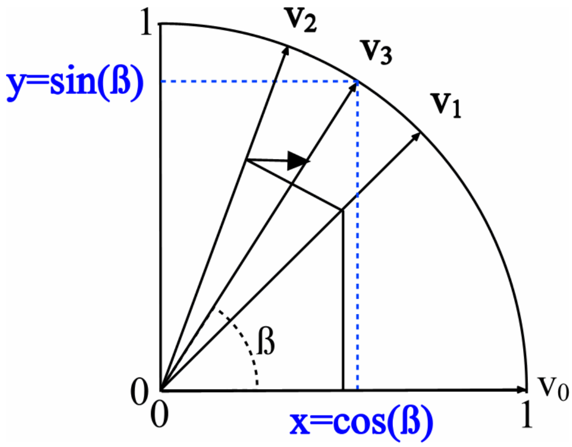
Source du texte : Wikipédia

CORDIC (sigle de Coordinate Rotation Digital Computer : « calcul numérique par rotation de coordonnées ») est un algorithme de calcul des fonctions trigonométriques et hyperboliques, notamment utilisé dans les calculatrices. Il a été décrit pour la première fois en 1959 par Jack E. Volder.

CORDIC permet de déterminer le sinus ou le cosinus d'un angle donné en radians sous un format virgule fixe. Pour trouver le sinus ou le cosinus d'un angle β, on recherche la coordonnée x ou y du point du cercle trigonométrique lui correspondant.

CORDIC commence les calculs avec un vecteur $v_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Durant la première itération, le vecteur subit une rotation de 45° dans le sens antihoraire (sens trigonométrique) afin d'obtenir un nouveau vecteur v_1. Des itérations successives doivent engendrer une rotation du vecteur dans la bonne direction. À chaque itération, la rotation est faite d'un angle prédéterminé et moindre que le précédent. Ceci jusqu'à converger vers l'angle voulu.



Plus formellement, à chaque itération i, on calcule un nouveau vecteur grâce à la multiplication du vecteur v_i avec la matrice de rotation R_i : $v_{i+1} = R_i\, v_i$

La matrice de rotation Ri est :

$$R_i=\begin{pmatrix}\cos(\gamma_i) & -\sin(\gamma_i)\\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i)\end{pmatrix}$$

En factorisant le terme cos (γ_i), on obtient :

$$\begin{aligned}v_{i+1}&=R_i v_i\\ &=\cos(\gamma_i)\begin{pmatrix}1 & \sigma_i\tan(\gamma_i)\\ -\sigma_i\tan(\gamma_i) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le facteur σi prend les valeurs +1 ou -1 et sert à indiquer le sens de la rotation. Si l'on restreint les choix possibles pour l'angle γ de manière à ce que tan(γ) soit égal à 2^{-i}, alors la multiplication par la tangente devient une multiplication par une puissance de 2. Le calcul devient :

$$\begin{aligned}v_{i+1}&=R_i v_i\\ &=\cos(\arctan(2^{-i}))\begin{pmatrix}1 & \sigma_i 2^{-i}\\ -\sigma_i 2^{-i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notons K =cos (arctan (2^{-i})) . Ces coefficients K_i peuvent être ignorés pendant les itérations et factorisés en un seul coefficient multiplicatif final (dépendant de n) :

$$K(n)=\prod_{i=0}^{n-1} K_i=\prod_{i=0}^{n-1}\cos(\arctan(2^{-i}))$$
$$=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$$

(utiliser $\cos^2(\arctan(x))=\frac{1}{1+x^2}$)

Après suffisamment d'itérations, l'angle du vecteur sera proche de l'angle β voulu.

La dernière étape consiste à déterminer à chaque itération le sens de rotation. Pour ce faire, on regarde l'angle $\beta n+1$ actuel du vecteur que l'on soustrait à l'angle désiré. On teste si cette différence est positive (rotation dans le sens horaire) ou négative (sens trigonométrique), de façon à s'approcher de l'angle β.

$\beta_{i+1} = \beta_i - \sigma_i \gamma_i$

$\gamma_i = \arctan(2^{-i})$

Les valeurs de γn sont pré-calculées dans une table mémorisée de valeurs. Toutefois, pour des angles petits, on utilise l'approximation arctan(γn) ≈ γn dans une représentation en virgule fixe, permettant ainsi de réduire la taille de cette table.

Comme illustré sur le schéma de la page précédente, le sinus de l'angle β est la coordonnée y du vecteur final vn, alors que la coordonnée x correspond au cosinus.

En 1971, John Stephen Walther de Hewlett Packard, a présenté une généralisation de l'algorithme qui fut mise en œuvre dans la calculatrice HP-35. Cette méthode permet de calculer notamment les fonctions hyperboliques mais également d'autres fonctions comme l'exponentielle.

HP-35

La généralisation se présente comme suit :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k - m\sigma_k y_k 2^{-k} \\ y_{k+1} &= y_k+\sigma_k x_k 2^{-k} \\ z_{k+1} &= z_k-\sigma_k \epsilon_k \end{cases}$$ avec

$m\in\{-1;0;1\}$, ϵ_k des constantes définies à l'avance et $\sigma_k\in\{-1;1\}$ (en fonction de la valeur de z_k).

7 *Nombres pseudo- aléatoires*

Un ordinateur ne sait pas générer du hasard. Il construit en fait une suite de nombres entiers qui a l'apparence du hasard, mais qui est tout à fait déterministe. Par exemple, la suite suivante est couramment utilisée :

$$u_{n+1}=(16807\,u_n)\,mod\,(2^{31}-1)$$

Ces nombres sont ensuite divisés par $2^{31}-1$ pour obtenir des nombres dans l'intervalle [0;1[.

Ce sujet est très vaste … vous pouvez vous référer au cours «Le hasard des ordinateurs», sur
https://www.apprendre-en-ligne.net/random

« La Matrice est universelle. Elle est omniprésente. Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision. Tu ressens sa présence, quand tu pars au travail, quand tu vas à l'église, ou quand tu paies tes factures. Elle est le monde, qu'on superpose à ton regard pour t'empêcher de voir la vérité.»

Cité dans le film Matrix (1999), écrit par Andy et Lana Wachowski »

A savoir en fin de chapitre

Progressions arithmétiques et géométriques

✔ connaître et savoir utiliser les formules pour les progressions arithmétiques ;

✔ connaître et savoir utiliser les formules pour les progressions géométriques, y compris à l'infini ;

✔ à la lecture d'un problème, savoir de quel type de progression il s'agit ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 9

Suites

✔ connaître la définition et le vocabulaire associé aux suites ;

✔ savoir étudier la convergence d'une suite : avec la définition dans des cas simples, en utilisant différentes méthodes autrement ;

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 10 à 16

Séries

✔ connaître la définition et le vocabulaire associé aux séries ; sommes partielles ;

✔ convergence d'une série ;

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 17 à 18

Critères

✔ connaître les critères de convergence d'une série et savoir les utiliser : critère de divergence, séries alternées, de comparaison, du quotient, de la racine, de l'intégrale ;

✔ convergence absolue ;

Voir la théorie 8 à 11 et les exercices 19 à 31

Séries entières

✔ définition de série entière et de rayon de convergence ;

✔ déterminer un rayon de convergence ;

Voir la théorie 12 et les exercices 32 à 33

Approximation de fonctions

✔ développer une fonction en une série entière ;

✔ calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Voir la théorie 13 à 14 et les exercices 34 à 41