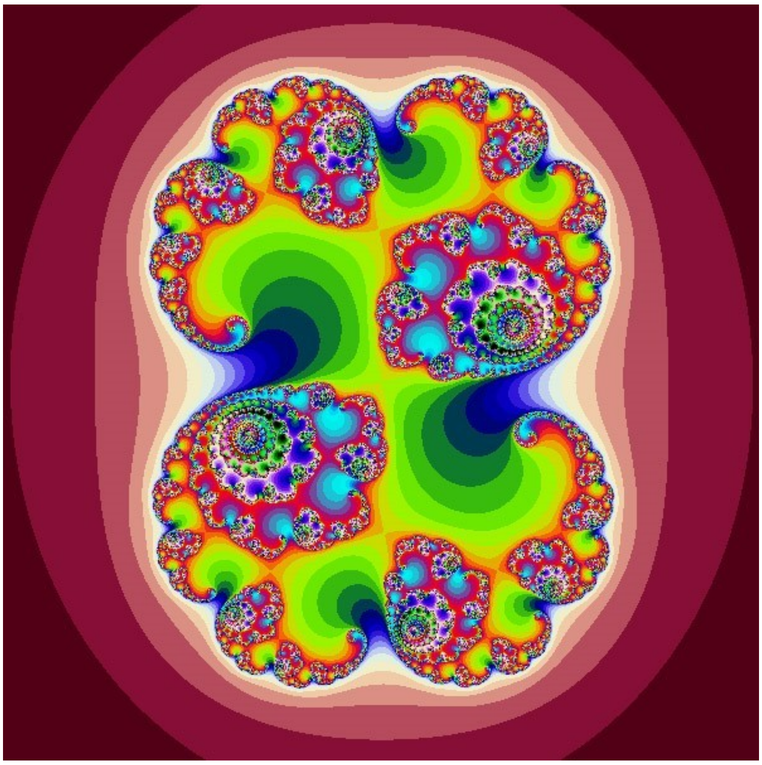
Ma4A - Chapitre Av1 : Nombres complexes



Ensemble de Julia

Problème

Un losange a des diagonales de longeurs respectives 6 et 18 cm. On ne peut pas l'inscrire dans un cercle, mais il existe au moins un cercle qui passe à égale distance de ses quatre sommets (la distance d'un point à un cercle est la plus petite distance qui existe entre le point et un point du cercle). Quel(s) rayon(s) peut avoir ce cercle ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Sic tamen operabimur

1. Il y a bien longtemps, les équations du deuxième degré ont été étudiées : à Babylone dès le XVIIIe siècle av JC, en Inde ou par les arabes. Al-Khwârizmî (env. 780-850) le fait de façon systématique dans son œuvre « Abrégé de calcul par la restauration et la comparaison », qui donnera plus tard son nom à l'algèbre, le mot «al-jabr» signifiant «restauration».

Première page du Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala

Nous connaissons aujourd'hui la célèbre formule de Viète (1540-1603), qui permet de résoudre les équations de degré 2 et de factoriser les expressions de degré 2.

Qu'en est-il des équations polynomiales de degré supérieur ?

Tablette d'argile BM 13901, 2270 av. J.-C, qui contient un «manuel d'algèbre», dont la méthode pour résoudre une équation du 2e degré.

2. Vers 1070, Omar Khayyam, mathématicien persan, propose pour la première fois une théorie géométrique des équations de degré trois mais n'obtient pas de méthode de résolution algébrique. Jusqu'au XVe siècle, les plus grands mathématiciens douteront de la possibilité de résoudre algébriquement les équations du troisième degré.

Nicolà Tartaglia (1499 - 1557) trouve la méthode de résolution lors d'un concours et la garde secrète. Sous pression et attiré par de fausses promesses, il la cède à Gerolamo Cardano (1501 - 1576) qui la publie sous son nom en 1545 dans son «Ars magna sive de regulis algebraicis». Il est alors probablement le meilleur algébriste de toute l'Europe. À la page 131, il pose et résout le problème suivant : « Diviser 10 en deux parties telles que le produit des parties soit 40».

a. Montrer que ce problème ne possède pas de solutions réelles.

b. En utilisant la complétion du carré montrer que l'on arriverait sur les «solutions» $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$, ce que Cardano note 5. p. Rx. m. 15 et 5. m. Rx. m. 15.

c. En supposant vraie la propriété suivante : $(\sqrt{a})^2=a\,,\forall\, a\in\mathbb{R}$, montrer que les solutions précédentes satisfont le problème de Cardano.

d. Trouver les valeurs de p et q telles que les solutions de l'équation $y^3+ay^2+by+c=0$ peuvent être déterminées par une transformation affine des solutions de l'équation x^3+px+q .

e. Poser $x=u+v$ et montrer que si le système $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3\cdot v^3=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$ possède une solution, alors $u+v$ est une solution de x^3+px+q .

f. Poser $\lambda_1=u^3$ et $\lambda_2=v^3$ et résoudre le système précédent pour trouver la formule dite de Tartaglia-Cardano : $x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$.

3. Résoudre les équations suivantes en utilisant cette méthode .

a. $x^3-3x-2=0$ **b.** $x^3-15x-4=0$

2 [Activité] Le nombre *i*

Rafaele Bombelli (1522-1572) constate que dans la formule de Tartaglia-Cardan les racines carrées contiennent des valeurs négatives justement lorsque l'équation admet trois solutions distinctes et réelles. Il perçoit que ces racines de nombres négatifs doivent avoir un fondement et imagine alors les racines carrées de réels négatifs. C'est Descartes en 1637 qui donne aux «nombres impossibles» de Bombelli le nom d'imaginaire.

Si on effectue le produit $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ en appliquant la définition d'une racine carrée et en appliquant la propriété $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ on obtient que −1 = 1, ce qui est absurde!

En fait la présence du symbole $\sqrt{\ }$ prête à confusion en rappelant une propriété uniquement valable pour des réels positifs. Pour ne pas succomber à la tentation de l'utiliser dans un contexte où elle n'est pas pertinente, et pour éviter les conséquences fâcheuses, Euler propose en 1777 de remplacer le symbole $\sqrt{-1}$ par i. Cette notation, reprise par Gauss au début du XIXe siècle, est toujours utilisée.

1. Définir le nombre i.

2. Écrire les nombres dont le carré est −25, −2 et $-\sqrt{3}$ en utilisant le symbole i.

3. Résoudre les équations $x^2+5=2x$ et $x^3=1$ et écrire leurs solutions en utilisant le symbole i.

En mathématiques élémentaires, la racine carrée d'un nombre réel positif x est l'unique réel positif dont le carré est égal à x. En algèbre, dans un ensemble A muni d'une opération de multiplication, on appelle **racine carrée** de $a\in A$ tout élément de A dont le carré vaut a. On évitera alors de noter $\sqrt{a}$ pour éviter les confusions.

4. Montrer que $i\neq\sqrt{-1}$ mais que $\sqrt{-1}=\{-i\,;i\}$.

5. Reprendre $x^3-15x-4=0$. La solution fournie par la formule de Tartaglia-Cardano est-elle réelle ?

Voir la théorie 1 et les exercices 1 à 4

3 [Activité] Les nombres complexes

1. Définir les **nombres complexes**. Donner des exemples.

2. Définir l'égalité entre nombres complexes.

3. Définir l'addition et la soustraction de deux nombres complexes. Donner des exemples.

4. Définir la notion de **conjugué** d'un nombre complexe. Donner des exemples.

5. Définir la multiplication et la division de deux nombres complexes. Donner des exemples.

6. Soit $z_1=4-2i$, $z_2=-3-4i$ et $z_3=-2+7i$. Calculer z_2-z_3 , $z_1\cdot z_2$, $z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

7. Soit $z_1=2+3i$ et $z_2=i-3$. Calculer z_1+z_2 , $z_1\cdot\overline{z_2}$, $z_1\cdot\overline{z_1}$ et $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$.

8. Démontrer les propriétés suivantes :

Soit $z = a+bi$ et $w = c+di$ deux nombres complexes. Alors on a :

a. $\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

b. $\Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

c. $\bar{\bar{z}}=z$

d. $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$

e. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

f. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

g. $z=\bar{z}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$

4 [Activité] Racines et équations

1. Calculer les solutions de $\sqrt{6+8i}$.

2. Enoncer et démontrer la relation existant entre les deux racines d'un nombre complexe. Expliciter le cas où la partie imaginaire est nulle.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a. $(3-i)z+5i=-1$ **b.** $z+2\bar{z}=3-4i$ **c.** $z^3=-2z$

Voir la théorie 2 à 4 et les exercices 5 à 18

5 [Activité] Approche géométrique

À la fin du XVIIIe siècle, on utilise les quantités imaginaires comme outils pratiques tant en analyse qu'en algèbre mais le caractère irréel de la racine carrée de −1 reste un problème. Les quantités imaginaires ne sont pas totalement acceptées par la communauté mathématique mais seulement tolérées.

1. Expliquer comment l'ensemble des nombres complexes peut être mis en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des points du plan, ou avec celui des vecteurs du plan.

2. Interpréter géométriquement l'addition et la soustraction dans $\mathbb{C}$ ainsi que la multiplication d'un complexe par un nombre réel.

3. Déterminer la **forme trigonométrique** (aussi appelée **forme polaire**) des nombres complexes suivants, en identifiant **module** et **argument**, puis les représenter dans le plan complexe :

a. i

b. $2i$

c. $1+i$

d. -7

e. $2-2i$

f. $3i-3\sqrt{3}$

g. $1-i\sqrt{3}$

h. $\frac{i\sqrt{2}}{4+4i}$

i. $\frac{1}{i}$

4. Écrire les nombres complexes suivants, donnés par leurs module et argument, sous forme cartésienne ($a+bi$).

a. $\rho=2\,;\theta=\pi$ **b.** $\rho=\sqrt{2}\,;\theta=\frac{\pi}{6}$ **c.** $\rho=\frac{1}{2}\,;\theta=\frac{5\pi}{4}$ **d.** $\rho=\frac{1}{2}\,;\theta=\frac{9\pi}{4}$

6 [Activité] Formule de De Moivre

Un siècle après leur naissance, les quantités imaginaires commencent à être utilisées par de nombreux mathématiciens. On cherche alors à spécifier leurs règles de calcul et à en isoler la partie réelle. La difficulté se présente dans l'extraction de la racine n-ème d'un nombre complexe. Cette opération est nécessaire par exemple pour exhiber les solutions réelles d'une équation de degré 3. La démarche suivie par Abraham de Moivre établit un lien entre l'extraction d'une racine n-ème et la division d'un arc en n parties égales. Il publie en 1730 sa formule :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

1. Démontrer la **formule de Moivre** pour tout réel x et pour tout entier relatif n.

2. Faire le lien avec la multiplication et la division de deux nombres complexes.

7 [Activité] Forme exponentielle

Euler a beaucoup contribué au calcul avec les nombres complexes, en particulier en étendant la fonction logarithmique à des valeurs négatives et complexes. La formule d'Euler fut mise en évidence pour la première fois par Roger Cotes en 1714 ; Euler la publia sous sa forme actuelle en 1748.

Pour tout nombre réel x, on a $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$: c'est la **formule d'Euler**.

1. Expliquer pourquoi cette définition (dans $\mathbb{C}$) est compatible avec ce que nous avons déjà vu d'une propriété fondamentale de l'exponentielle (dans $\mathbb{R}$).

2. Poser x = π pour obtenir la fameuse **identité d'Euler**. Pourquoi considère-t-on parfois cette formule comme « la formule la plus remarquable des mathématiques » ? Est-elle « belle » ?

3. Démontrer les **« Relations d'Euler »** : $\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$, pour tout nombre réel x.

4. Déterminer la **forme exponentielle** des nombres complexes suivants et les représenter dans le plan complexe :

a. i **b.** $3i-3\sqrt{3}$ **c.** $\frac{1}{i}$

5. Montrer qu'ainsi on les **« Relations d'Euler »** : $\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$, pour tout nombre réel x.

6. Utiliser la forme exponentielle pour interpréter géométriquement la multiplication puis la division de deux complexes. Illustrer par des exemples.

7. Interpréter la formule de De Moivre en terme exponentiel.

Prérequis et activités de découverte

8 [Activité] Racines de l'unité

1. Calculer :

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ **b.** $(2+2i)^6$ **c.** $(-1+i)^{-8}$

2. Montrer que $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ et que $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.

3. Résoudre l'équation $z^5=1$ puis factoriser l'expression z^5-1 .

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 19 à 35

9 [Activité] Factorisation

On peut démontrer des théorèmes très importants dans l'ensemble des nombres complexes :

Théorème : Soit $P_n(z)=a_n z^n+...+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $z_1 ; z_{2,} ... z_n \in \mathbb{C}$ (non forcément tous distincts) tels qu'on peut factoriser $P_n(z)$ ainsi : $P_n(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$.

Rappel de 2e : le nombre de fois que $(z-z_i)$ apparaît dans la décomposition de $P_n(z)$ est appelée **multiplicité** de z_i .

Théorème : Soit $P_n(z)=a_n z^n+...+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors $P_n(z)=0 \Leftrightarrow P_n(\bar{z})=0$

Théorème : Tout polynôme à coefficient réels se factorise en produits de coefficients réels de degrés 1 ou 2.

10 [Activité] Equations de degré 3

Etudier les différents cas possible pour les racines d'un polynôme de degré 3 à coefficients réels.

11 [Aller plus loin] Après le degré 3 ?

1. De façon similaire, on peut trouver une **formule en radicaux** pour déterminer les solutions d'une équation du quatrième degré. Comment procéder ?

2. Et pour une équation du 5ème degré ? Après ces découvertes, de nombreux mathématiciens, dont Leibnitz, ont tenté de généraliser ces formules pour les équations de degré 5 et plus. Ce n'est qu'avec le développement d'une branche nouvelle des mathématiques, l'algèbre, et plus particulièrement la théorie des groupes (Lagrange 1770, Galois 1832), que le problème pourra être résolu par Abel qui prouvera, en 1826, à l'âge de 24 ans, le :

Théorème : Il n'existe pas de "formule en radicaux" qui permette de résoudre toutes les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Pour résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 5, il faut donc procéder au cas par cas, et souvent avoir recours au calcul numérique (approximation de la solution avec estimation de l'erreur).

Voir la théorie 8 et les exercices 36 à 39

12 [Aller plus loin] Ensembles de Julia

Une fonction complexe f est une fonction qui associe à un nombre complexe z un nombre complexe $f(z)$. Contrairement aux fonctions réelles, on ne peut pas représenter graphiquement les fonctions complexes ; il faudrait en effet utiliser une représentation graphique en quatre dimensions !

1. Caractériser les **transformations complexes** définies ci-dessous (translation, rotation, homothétie, ...) en précisant, s'il y a lieu, les **points fixes** de ces transformations (c'est-à-dire les z tels que $f(z) = z$), l'angle de rotation et le rapport d'homothétie.

a. $f_1(z)=z+5-i$

b. $f_1(z)=\frac{2}{3}z$

c. $f_1(z)=3iz$

d. $f_1(z)=\bar{z}$

e. $f_1(z)=\frac{1}{z}$

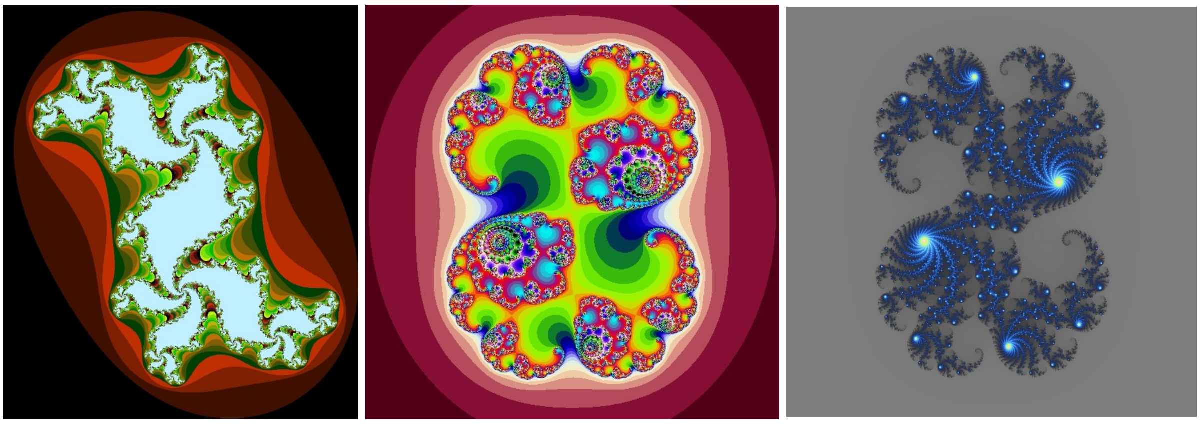
f. $f_1(z)=\frac{z}{\bar{z}}$

2. Étant donnés deux nombres complexes c et z_0, on définit la suite (z_n) par la relation de récurrence suivante : $z_{n+1}=z_n^2+c$

Pour une valeur donnée de c, **l'ensemble de Julia** correspondant est la frontière de l'ensemble des valeurs initiales z_0 pour lesquelles la suite est **bornée**.

On fait produire l'image par un algorithme qui choisit les couleurs en fonction de la vitesse de convergence ou de divergence de la suite.

Ensemble de Julia pour $c = 0.3+0.5i$, $c = 0.285+0.01i$ et $c = 0.285+0.013i$:



13 [Aller plus loin] Un peu d'histoire

En 1535, en Italie, lors d'un tournoi mathématique, figurent des problèmes se ramenant à une équation du troisième degré. Niccolo Fontana, dit Tartaglia (« Le Bègue ») triomphe en utilisant la formule de résolution simplifiée $x^3+px=q$, découverte en 1526 par Scipion del Ferro. Del Ferro l'avait confiée à son disciple Fior, qui l'avait utilisée lors d'un duel avec Tartaglia, qui lui connaissait déjà une méthode de résolution d'une équation du type $x^3+ax^2=b$. Cardan (Girolamo Cardano), qui participait à ce tournoi, arrive à convaincre Tartaglia de lui dévoiler ses formules, en lui promettant de ne pas les divulguer.

En 1545, Cardan ne tient pas sa promesse et publie, dans son « Ars magna », la méthode générale de résolution des équations du troisième degré. La formule de résolution est alors appelée Formule de Cardan, et cette appellation reste actuelle ! En 1546, Tartaglia publie à son tour sa théorie du troisième degré, en y ajoutant diverses considérations sur la science des nombres et des curiosités mathématiques. En 1550, Bombelli approfondit la Formule de Cardan. Il constate, après d'autres, que dans certains cas, la résolution conduit à des expressions de la forme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, ... Dans son Algebra (publié en 1572), il est le premier à donner un sens à ces racines de nombres négatifs. Il les traite comme des nombres réels, les appelle « nombres sophistiques », décide d'opérer sur eux comme si c'étaient des nombres réels et formule des règles de multiplication.

Par la suite, les mathématiciens tentent de bâtir une théorie avec ces nombres imaginaires. Vers 1750, le Suisse Euler introduit la notation $i=\sqrt{-1}$. Selon Euler (1770) : « Toutes les expressions comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, ... sont des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils représentent les racines carrées de quantités négatives ; de ces nombres, nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement les rend imaginaires ou impossibles».

L'Algebra de Raphaël Bombelli où apparaissent les premières propriétés des nombres complexes (1572).

Wessel (1798), Argand (1806) et finalement Gauss (1831-1832) donnent une interprétation géométrique des nombres imaginaires. Gauss introduit l'expression « nombres complexes » pour désigner ces nombres imaginaires, et il montre que tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En Irlande, W.R. Hamilton, présente en 1833 à l'Académie royale d'Irlande sa « Theory of conjugates functions or algebraic couples », suivie deux ans plus tard d'une théorie plus générale sur l'algèbre.

Construction axiomatique des nombres complexes (W.R. Hamilton, 1805-1865)

On définit dans $\mathbb{R} x \mathbb{R}=\mathbb{R}^2$:

- l'égalité : $(x_1 ;y_1) = (x_2 ;y_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$
- la somme : $(x_1 ;y_1)+(x_2 ;y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$
- la multiplication : $(x_1 ;y_1)\cdot(x_2 ;y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 ; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

On a, par exemple : i correspond au couple (0;1) et 2-3i à (2 ;-3) ; puis on montre que :

- ces deux opérations possèdent chacune un élément neutre (0;0) et (1;0) ;
- ces deux opérations sont commutatives ;
- tout élément possède un opposé (pour l'addition) ;
- tout élément non nul possède un inverse (pour la multiplication) ;
- le produit est distributif sur la somme.

A.L. Cauchy reste méfiant concernant les nombres complexes qui ne sont, selon lui, que des expressions symboliques, « une combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien en elle-même ». Par souci de rigueur, il veut établir l'existence des quantités imaginaires dans un corpus algébrique ne faisant pas appel à l'intuition. Il craint que l'appel à la représentation géométrique ne fasse qu'ajouter d'autres paradoxes et d'autres intuitions fausses. Il faut attendre son écrit de 1847, « Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences », pour le voir accepter les complexes comme des quantités et pas seulement comme des expressions symboliques.

Les nombres complexes ont été difficilement acceptés par la communauté mathématique. Introduits peu après les nombres relatifs, eux-mêmes longtemps rejetés, ils ont permis de résoudre des types d'équations dont les recherches de solutions n'étaient même pas envisageables à l'époque.» Durant la première moitié du XIXe siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définie sur des couples de réels.

Cependant leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et l'analyse et l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique que dans le domaine de l'électricité, en avaient déjà fait des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques. Il sont aujourd'hui essentiels à la compréhension de la structure de la matière à petite échelle (mécanique quantique) comme à grande échelle (théorie de la relativité) ...

Source : Madimu https://www.apprendre-en-ligne.net/complexes/complexes.pdf et Wikipedia, histoire des nombres complexes.

Voir la théorie 9 et les exercices 42 à 44

1 [A savoir] Tartaglia-Cardano

Théorème « Tartaglia-Cardano »

Une solution de l'équation $x^3+px+q=0 \ (p,q\in\mathbb{R})$ est donnée par
$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Remarque : on peut montrer que si on pose $\Delta=\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$, on a :

- ☐ si $\Delta<0$, alors $x^3+px+q=0$ admet trois solutions réelles distinctes.
- ☐ si $\Delta=0$, alors $x^3+px+q=0$ admet trois solutions réelles, dont une de **multiplicité** deux.
- ☐ si $\Delta>0$, alors $x^3+px+q=0$ admet une solution réelle (et deux solutions complexes conjuguées).

Voir les exercices 1 à 4

2 [A savoir] Les nombres complexes

Définition « *i* »

i est un «nombre imaginaire» tel que $i^2=-1$

Définition « Nombre complexe »

Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z=a+bi$ où $a,b\in\mathbb{R}$
a est la **partie réelle** de z, notée $\Re(z)$ ou Re(z)
b est la **partie imaginaire** de z, notée $\Im(z)$ ou Im(z)
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$

Exemple : $2+3i$, $1.4+(-4)i$ et $\pi+\sqrt{7}i$ sont des nombres complexes.

Notation

On note plus simplement $z=a+(-b)i$ par $z=a-bi$

Exemple : $1.4+(-4)i = 1.4-4i$

Définition « Egalité de nombres complexes »

Soit $z=a+bi$ et $z=c+di$ deux nombres complexes (donc $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
On a : $z=w$ si et seulement si $\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$

Définition « Nombre complexe nul »

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe.
z est **nul** si et seulement si $\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$

3 [A savoir] Opérations avec les nombres complexes

Définition « Somme et différence de nombres complexes »

Soit $z=a+bi$ et $w=c+di$ deux nombres complexes.
On définit :

- **la somme de deux nombres complexes** : $z+w = (a+c) + (b+d)i$
- **la différence de deux nombres complexes** : $z - w = (a-c) + (b-d)i$

Remarque : de façon opérationnelle, on peut donc toujours effectuer les additions et soustractions de nombres complexes de façon « naïve » !

Exemples :

- $(2+3i) + (5-4i) = (2+5) + (3+5)i = 7 + 8i$
- $(2+3i) - (5-4i) = (2-5) + (3-5)i = (-3) + (-2)i = -3 - 2i$

Définition « Conjugué d'un nombre complexe »

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe.
Le **conjugué** de z est le nombre complexe $\bar{z}=a+(-b)i=a-bi$

Exemple : si $z = 2+3i$ et $w = -7-5i$, alors $\bar{z}=2-3i$ et $\bar{w}=-7+5i$

Définition « Produit et quotient de nombres complexes »

Soit $z=a+bi$ et $w=c+di$ deux nombres complexes.
On définit :

- **le produit de deux nombres complexes** : $z\cdot w = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- **le quotient de deux nombres complexes** : $\frac{z}{w}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$, pour $w\neq 0+0i$

Remarque : le produit et le quotient sont définis de telle sorte à étendre notre « pratique habituelle » dans ℝ, en particulier quant à la double distributivité :

- $(a+bi)+(c+di) \overset{\text{"cf double distr ℝ"}}{=} a\cdot c+b\cdot i\cdot c+a\cdot d\cdot i+bi\cdot di \overset{\text{"cf pror. ℝ"}}{=} ac+bc\cdot i+ad\cdot i+bd\cdot i^2$
$\overset{\text{"cf pror. ℝ"}}{=} ac+bc\cdot i+ad\cdot i+bd\cdot(-1) \overset{\text{"cf pror. ℝ"}}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$

- $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} \overset{\text{"cf double distr ℝ"}}{=} \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2+d^2)+(cd-dc)}$
$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \overset{\text{"cf pror. ℝ"}}{=} \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$

De façon opérationnelle, on peut donc toujours effectuer de façon « naïve » les multiplications en utilisant la « double distributivité comme dans ℝ » et les divisions en multipliant par le conjugué au numérateur et au dénominateur !

Exemples :

- $(2+3i)\cdot(5-4i) = (2\cdot 5-3\cdot(-4)) + (2\cdot(-4)+3\cdot 5)i = 12 + 3i$
- $\frac{2+3i}{5-4i}=\frac{(2+3i)\cdot(5+4i)}{(5-4i)\cdot(5+4i)}=\frac{2\cdot 5-3\cdot(-4)}{5^2+(-4)^2}+\frac{2\cdot(-4)+3\cdot 5}{5^2+(-4)^2}i=\frac{12}{41}+\frac{3}{41}i$

Remarques :

- ces opérations entre complexes donnent toujours un nombre complexe ; elles possèdent les mêmes propriétés que les opérations dans : commutativité, associativité, distributivité, éléments neutres (pour l'addition et la multiplication) et inverse (pour la multiplication) ;

- si $z=a+bi$ et $w=c+di$ sont deux nombres complexes, on ne peut pas écrire « comparer » z et w, soir dire que $z>w$ ou $z<w$! On dit qu'il n'existe pas de **relation d'ordre total** (contrairement à ce qui existe dans $\mathbb{R}$!

- si $z=a+bi\neq 0$, alors $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{a^2+b^2}$ est l'**inverse** de z, c'est-à-dire que $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$

Racine carrée

$w\in\mathbb{C}$ est appelé **racine carrée** de $z\in\mathbb{C}$ si et seulement $w^2=z$

Exemples : i et -i sont des racines carrées de -1, car $i^2=(-i)^2=-1$

Remarque : tout $z\in\mathbb{C}^*$ possède exactement deux racines carrées distinctes.

Propriétés du conjugué

Soit $z = a+bi$ et $w = c+di$ deux nombres complexes. Alors on a :

1 $\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

2 $\overline{\overline{z}}=z$

3 $\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}$

4 $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

5 $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

6 $z=\overline{z}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0$

4 [A savoir] Equations

Méthode « Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$ »

Pour résoudre une équation dans $\mathbb{C}$, on peut écrire $z = a+bi$, réduire puis résoudre un système d'équations réelles.

Exemple : résoudre $z^2=2-i$

On pose $z = a+bi$ puis on écrit : $z^2=2-i\Leftrightarrow (a+bi)^2=2-i\Leftrightarrow (a^2-b^2)+2abi=2-i$

ce qui est équivalent au système $\begin{cases}a^2-b^2=1\\2ab=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=1\\2ab=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=1\\b=-\dfrac{1}{2a}\end{cases}$

On substitue :

$$a^2-\left(-\frac{1}{2a}\right)^2=1\Leftrightarrow a^2-\frac{1}{4a^2}=1\Leftrightarrow 4a^4-1=4a^2\Leftrightarrow 4a^4-4a^2-1=0\Leftrightarrow (2a^2-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}$$

d'où les deux solutions : $a=\sqrt{2}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $a=-\sqrt{2}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2(-\sqrt{2})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

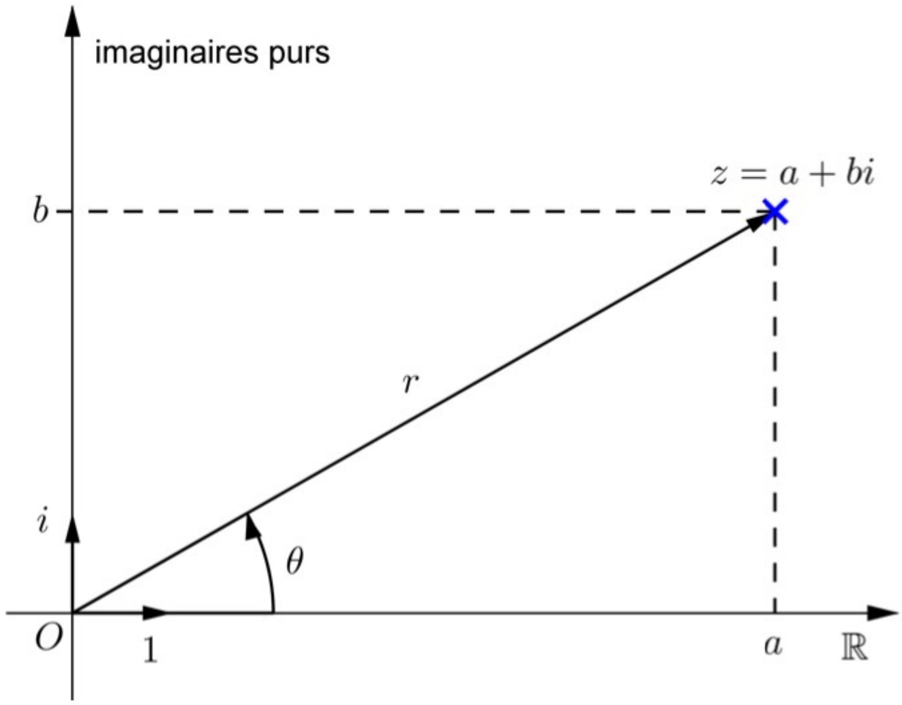
c'est-à-dire : $z_1=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}i$ et $z_3=-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}i$

Voir les exercices 5 à 18

5 [A savoir] Représentation géométrique

Définition « Plan complexe »

Le **plan complexe** désigne un plan muni d'un repère orthonormé. Dans un tel repère, on a une bijection entre l'ensemble des nombres complexes et les points du plan.
A tout point $P(a;b)$ est associé un unique nombre complexe $z=a+bi$.
Réciproquement, à tout nombre complexe $z=a+bi$ est associé un unique point $P(\Re(z);\Im(z))=P(a;b)$.



Définition « Module et argument »

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe.

☐ Le **module** de z, noté $|z|$ ou ρ , est le nombre réel positif $|z|=\rho=z\cdot\bar{z}=\sqrt{a^2+b^2}$

☐ On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ ou θ , toute mesure de l'angle que fait la représentation de z dans le plan complexe avec l'axe des réels positifs.

Remarque : si $\theta=arg(z)$, alors tous les autres arguments sont de la forme $\theta+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

Forme trigonométrique (polaire)

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe écrit sous **forme cartésienne**, de module ρ et d'argument θ .
Alors z peut aussi s'écrire $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ (**forme trigonométrique** ou **polaire**).
ρ et θ sont les **coordonnées polaires** de z.

Théorème « Formule de Moivre »

Soit $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$. Alors on a, pour tout réel x et pour tout entier relatif n :

$$z^n=(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

Formule d'Euler

Pour tout nombre réel x, on a : $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Si on pose $x = \pi$, on obtient la fameuse **identité d'Euler** :

Identité d'Euler

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Remarque : cette formule parfois qualifiée de « formule la plus remarquable des mathématiques », ou comme un exemple de beauté mathématique. En effet, elle lie dans une égalité trois opérations fondamentales (addition, multiplication, exponentielle) et cinq constantes fondamentales $0, 1, \pi, e, i$ représentant respectivement l'arithmétique (0 et 1), la géométrie (π), l'analyse (e) et l'algèbre (i).

Théorème « Relations d'Euler »

Pour tout nombre réel x, on a : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

Forme exponentielle

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe de module ρ et d'argument θ .
Alors z peut aussi s'écrire $z = \rho\, e^{i\theta}$ (**forme exponentielle**).

Interprétation exponentielle de la formule de De Moivre

Soit $z = a + bi = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho\, e^{i\theta}$ un nombre complexe. On a

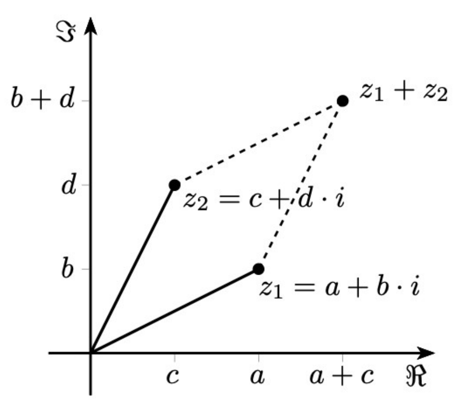
$$(\rho(\cos(x) + i\sin(x)))^n = \rho(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \cos(nx) + i\sin(nx) \Leftrightarrow (\rho\, e^{i\theta})^n = \rho\, e^{in\theta}$$

6 [A savoir] Opérations : vision géométrique

Les nombres complexes peuvent également être vus comme des vecteurs du plan d'origine O(0;0). On peut ainsi considérer les opérations entre complexes de façon géométrique.

Addition, soustraction et multiplication par un réel

☐ additionner (respectivement soustraire) deux complexes est équivalent à additionner (respectivement soustraire) les vecteurs correspondants ;

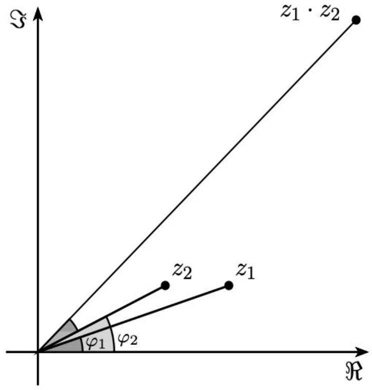


☐ multiplier un complexe par une nombre réel eux complexes est équivalent à multiplier le vecteur correspondant par ce nombre réel.

Multiplication et division

☐ multiplier deux complexes revient à multiplier les modules et additionner les arguments ;

Autrement dit : si $z_1=\rho_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))=\rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2=\rho_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))=\rho_2 e^{i\theta_2}$, on a :
$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))=\rho_1\cdot\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$



☐ diviser deux complexes revient à diviser les modules et soustraire les arguments.

7 [A savoir] Racines de l'unité

Définition « Racines de l'unité »

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième de l'unité** est une solution complexe de l'équation $z^n=1$

Méthode « Racines de l'unité »

Pour déterminer toutes les racines de l'unité pour un n donné, on utiliser la formule de De Moivre

Exemple : déterminer les racines 6-ièmes de l'unité

on doit résoudre $z^6=\rho^6 e^{i6\theta}=1$

or on a : $1=1\cdot e^{i\cdot 0}$, d'où : $\rho^6 e^{i6\theta}=1\cdot e^{i\cdot 0}$

ce qui est équivalent à : $\begin{cases}\rho^6=1\\ 6\theta=0+2k\pi\text{, avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho=1\\ \theta=\dfrac{k\pi}{3}\text{, avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

donc $z_i=e^{i\frac{k\pi}{3}}$, avec $k\in\mathbb{Z}$, ce qui donne 6 solutions pour k=0,1,2,3,4,5

k=0 : $z_0=e^{i\cdot 0}=1$

k=1 : $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

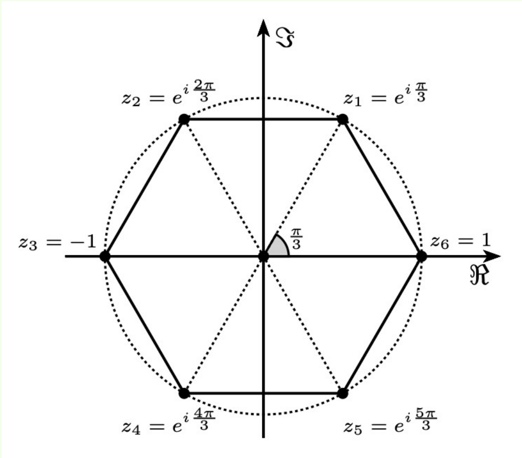
k=2 : $z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

k=3 : $z_3=e^{i\frac{3\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1$

k=4 : $z_4=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=5$: $z_5=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Géométriquement, les six solutions sont réparties symétriquement selon un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 dont l'un des sommets est le point (1;0).



Voir les exercices 19 à 35

8 [A savoir] Factorisation

Factorisation de l'expression z^n - 1

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour factoriser l'expression z^n – 1, il suffit d'utiliser les racines de l'unité.

Exemple : factoriser

on utiliser les racines de l'unité déterminées plus haut et on obtient :

$$z^6-1=\left(z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)(z-(-1))\left(z-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)(z-1)$$

Théorème «Factorisation dans $\mathbb{C}$ »

Soit $P_n(z)=a_n z^n+\ldots+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $z_1 ; z_{2,} \ldots z_n\in\mathbb{C}$ (non forcément tous distincts) tels qu'on peut factoriser $P_n(z)$ ainsi : $P_n(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$.

Rappel de 2e : le nombre de fois que $(z-z_i)$ apparaît dans la décomposition de $P_n(z)$ est appelée **multiplicité** de z_i .

Théorème

Soit $P_n(z)=a_n z^n+\ldots+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors $P_n(z)=0\Leftrightarrow P_n(\bar{z})=0$

Remarque : cela signifie qu'on peut toujours regrouper les racines complexes conjuguées !

Ce dernier théorème a une conséquence importante dans $\mathbb{R}$

Théorème

Tout polynôme à coefficient réels se factorise en produits de coefficients réels de degrés 1 ou 2.

Exemple : factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z)=z^4+1$

$$z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1 \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^4=e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho^4 e^{4i\theta}=e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^4=1\\ 4\theta=\pi+2k\pi\text{, avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\text{, avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Les quatre solutions sont $z_0=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1=e^{i\cdot 3\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=e^{i\cdot 5\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_3=e^{i\cdot 7\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La factorisation est $P(z)=z^4+1=(z-\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(z+\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(z+\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})(z-\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$

Voir les exercices 36 à 39

9 [A savoir] Fonctions complexes

Définition « fonction complexe »

Une **fonction complexe** f est une fonction qui associe à un nombre complexe z un nombre complexe $f(z)=z$ Contrairement aux fonctions réelles, on ne peut pas représenter graphiquement les fonctions complexes ; il faudrait en effet utiliser une représentation graphique en quatre dimensions !

Définition «point fixe »

Un **point fixe** d'une fonction complexe f est un nombre complexe z tel que $f(z)=z$.

Voir les exercices 40 à 42

Exercices d'entraînement

Introduction

1 En utilisant la formule de Tartaglia-Cardan résoudre les équations suivantes :

a. $x^3-18x-35=0$

b. $x^3=6x+6$

2 Soit l'équation $x^3=6x+40$.

a. La résoudre à l'aide de la formule de Tartaglia-Cardano.

Affirmation : la solution obtenue est un nombre entier égal à 4

b. Pour le montrer, chercher un nombre de la forme $a+\sqrt{b}$ dont le cube vaut $20+14\sqrt{2}$ et un nombre de la forme $c-\sqrt{d}$ dont le cube vaut $20-14\sqrt{2}$ et conclure.

3 Montrer que la solution de l'équation $x^3=15x+4$ donnée par la formule de Tartaglia-Cardan est 4. Pour cela il faut procéder comme dans l'exercice précédent mais un cherchant des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ en imaginant que $(\sqrt{-1})^2=1$.

4 Résoudre l'équation $x^3=3x+18$.

Voir la théorie 1

Calculs et équations

5 Soit $z_1=7-5i$, $z_2=2+i$ $z_3=-5+2i$, $z_4=-10-3i$, $z_5=8$ et $z_6=8i$. Calculer :

a. $z_1-z_2-z_3$

b. $z_1\cdot z_3\cdot z_4$

c. $z_3^2+z_4^2$

d. $iz_4-z_3z_6$

e. $\Im(z_4)$

f. $\Re(z_1^2 z_3)$

g. $\Im(2z_2-3z_4)$

h. $\dfrac{z_1}{z_6}$

i. $\dfrac{z_1}{z_2}$

j. $z_4\overline{z_4}$

6 Écrire les nombres dont le carré est −64 et −11 en utilisant le symbole i.

7 Résoudre les équations $x^2+2=x$ et $x^4=1$ et écrire leurs solutions en utilisant le symbole i.

8 Soit $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i$ et $w=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2i$.

Calculer $z+w, (z+w)^{100}, z\cdot w, z^2$.

9 Calculer et écrire sous la forme $a+bi$, avec $a, b\in\mathbb{R}$:

a. $(2+7i)^2$

b. $(2-4i)^2$

c. $(2-3i)(2+3i)$

d. $\dfrac{1}{i}$

e. $\dfrac{2-2i}{i}$

f. $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}i}$

g. $\dfrac{3-5i}{2-i}$

h. $\dfrac{-5+i}{3+11i}$

i. $\dfrac{1-i}{1+i}$

10 Calculer :

a. $1+i+i^2+i^3+...+i^{1000}$

b. $(1+i)^4$

c. $(1+i)^{100}$

11 Déterminer les racines carrées de :

a. -3i

b. 3 + 4i

12 Calculer les solutions de :

a. $\sqrt[3]{8}$

b. $\sqrt{1+i}$

13 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est égal au nombre complexe lui même.

b. Il existe des nombres complexes égaux à leur conjugué.

c. Il existe des nombres complexes opposés à leur conjugué.

14 Calculer astucieusement le conjugué de $\dfrac{(2-3i)(1+i)}{(3+2i)^2}$ et écrire le résultat sous la forme d'un nombre complexe $a+bi$

15 Montrer que si $z\in\mathbb{C}$ est une solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a, b, c\in\mathbb{R}$ alors $\bar{z}$ est aussi solution.

16 Montrer que si $z\in\mathbb{C}$, alors $\Re\left(\dfrac{z-\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\right)=0$.

17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $(1-i)\bar{z}-2+i=0$

b. $z^2+2z+5=0$

c. $z^2+2iz+3=0$

d. $z^2+z+1=0$

e. $(3+2i)z+(1-i)\bar{z}=1$

f. $2iz+4=-3z+i$

Exercices d'entraînement

18 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} 3z+2w=7+i \\ 5z-3w=-1+8i \end{cases}$

Voir la théorie 2 à 4

Formes trigonométrique et exponentielle

19 Déterminer l'inverse d'un nombre complexe donné sous forme trigonométrique.

20 À l'aide de la formule de Moivre, déterminer les formules pour cos(3*x*) et sin(3*x*).

21 En utilisant la formule d'Euler, résoudre l'équation $z^2+2-2\sqrt{3}i=0$

22 Représenter dans le plan complexe les nombres complexes suivants puis déterminer leurs formes trigonométrique et exponentielle :

a. $2i$ **c.** -7 **e.** $-1-i\sqrt{3}$

b. $1+i$ **d.** $2-2i$ **f.** $\dfrac{i\sqrt{2}}{4+4i}$

23 Écrire sous forme polaire :

a. $(1-i)^3$ **b.** $(\sqrt{3}+i)^7$ **c.** $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

24 Soit $z=(3+i)^{-1}+\dfrac{i}{(1-i)(2+i)}$

a. Déterminer $\Re(z)$ et $\Im(z)$.

b. Écrire z sous forme polaire et sous forme exponentielle.

25 Écrire les nombres complexes suivants sous forme cartésienne $a+bi$:

a. $5e^{\frac{i\pi}{6}}$ **c.** $3e^{\frac{2i\pi}{3}}$ **e.** $e^{\frac{-i\pi}{2}}$

b. $2e^{-\frac{i\pi}{6}}$ **d.** $4e^{-i\pi}$ **f.** $8e^{\frac{-i\pi}{4}}$

26 Représenter les sous-ensembles suivants du plan complexe :

a. $A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2\}$

b. $B=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 2\}$

c. $C=\{z\in\mathbb{C} \mid 2<|z|<3\}$

d. $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 2 \text{ et } -\frac{\pi}{2}\leq arg(z)\leq\frac{\pi}{2}\}$

27 Calculer z^2, z^3, z^4, z^5 et trouver une expression pour $z^n, n\in\mathbb{N}^*$ dans les cas suivants, puis représenter ces nombres dans le plan complexe :

a. $z=i$ **b.** $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **c.** $z=1+i$

28 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a. $z^2+2z+5=0$ **e.** $z^{10}-5z^5+4=0$

b. $z^3-z^2+z-1=0$ **f.** $z^6-11z^3+24=0$

c. $z^4=1$ **g.** $\bar{z}^3=1+i$

d. $z^6=64$ **h.** $z^2-5z+14zi=24+10i$

29 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2-5z+14zi=24+10i$.

30 Utiliser $\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ pour montrer que $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

31 Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}-i$.

a. Déterminer la plus petite des puissances entières positives de z qui permet d'obtenir un nombre réel.

b. Déterminer la plus petite des puissances entières positives de z dont le module soit plus grand que 1000.

32 Déterminer le nombre réel k pour que les solutions de l'équation $z^3-9z^2+kz-39=0$ soient alignées verticalement dans le plan complexe.

Calculer k et les solutions de l'équation.

33 Soit $z=1-\sqrt{3}i$ et $w=-2+2i$.

a. Calculer $z\cdot w$ sous forme cartésienne et sous forme exponentielle.

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

34 On cherche une formule pour $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

a. Résoudre l'équation $z^2=1+i$ en posant $z=a+bi$.

b. Résoudre l'équation $z^2=1+i$ en écrivant z sous forme exponentielle.

c. Comparer les deux points précédents pour montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

35 On cherche une formule pour $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

a. Soit $w=e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer w^5 et en déduire que $1+w+w^2+w^3+w^4=0$.

b. Montrer que pour tout $z\neq 0$, on a : $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=\frac{1}{z^2}\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)$

c. En déduire $w+\frac{1}{w}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

d. Utiliser les résultats précédents pour montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Voir la théorie 5 à 8

Factorisation

36 Démontrer le théorème suivant :

Soit $P_n(z)=a_n z^n+...+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Alors $P_n(z)=0 \Leftrightarrow P_n(\bar{z})=0$.

37 Soit $z^5-3z^4+7z^3-7z^2+6z-4=0$.

a. Montrer que $z=i$ et $z=2e^{\frac{i\pi}{3}}$ sont des solutions.

b. Trouver deux autres solutions.

c. S'il existe encore une autre solution, peut-elle avoir une partie imaginaire non nulle ? Justifier la réponse.

38 Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ le polynôme $P(z)=z^3+1$

39 Soit l'équation complexe $z^3+i=0$

a. Déterminer toutes ses solutions.

b. Représenter les solutions trouvées dans le plan complexe.

c. Calculer la somme de toutes les solutions.

Voir la théorie 8

Fonctions complexes

40 On considère la fonction f définie par $f(z)=-2i\bar{z}+1+i$.

a. Décrire géométriquement f.

b. Décrire l'image par f du sous-ensemble de $\mathbb{C}$ caractérisé par la condition :

i $|z|=1$ ii $\frac{1}{2}<\Im(z)<2$

41 Dans $\mathbb{C}$, on donne la fonction g telle que $g(z)=iz+8$ et l'ensemble E des nombres complexes z tel que le module de $z-7i$ vaut 5. En d'autres termes $E=\{z\in\mathbb{C}:|z-7i|=5\}$

a. Calculer le point fixe de la fonction g (le z tel que $g(z)=z$).

b. Représenter graphiquement l'ensemble des nombres $z=a+bi$ de l'ensemble E.

c. Interpréter géométriquement la fonction g, puis dessiner l'image F de E par la fonction g.

42 Soit $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z)=-i-\frac{2}{z}$.

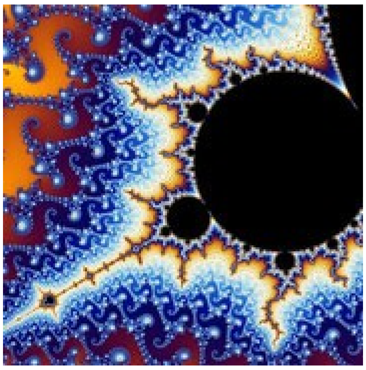
a. Déterminer les nombres complexes z qui satisfont l'équation $f(z)=z$.

b. Déterminer puis représenter graphiquement l'image par la fonction f de l'ensemble $\mathbb{R}^*$.

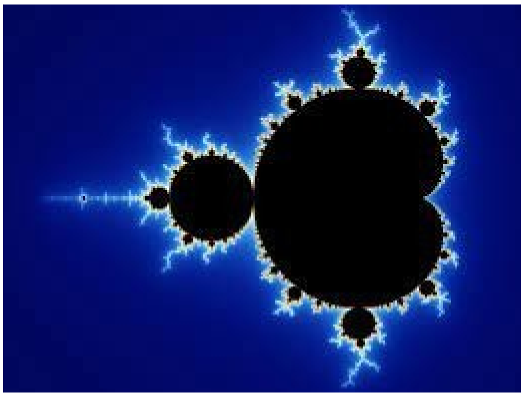
Voir la théorie 9

Exercices d'approfondissement

1 *Fractales*



2 *Ensemble de Mandelbrot*



a. Qui était Benoît Mandelbrot ?

b. Qu'est-ce que l'ensemble de Mandelbrot ?

c. Quel rapport avec les nombres complexes et les fractales ?

3 *Chaos*

a. Qu'est-ce que la théorie du chaos ?

b. Quel rapport avec les nombres complexes et les fractales ?

4 *Applications*

Comment les nombres complexes peuvent-ils être utilisés en électricité ?

« L'Esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'Analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non être, ce que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative »

Gottfried Wilhelm Leibnitz, philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand (1646 - 1716)

A savoir en fin de chapitre

Approche historique

- ✔ résolution des équations de degré 3 «à la manière historique» ;

Voir les exercices 1 à 4

Nombres complexes

- ✔ définition des nombres complexes ;
- ✔ opérations avec les nombres complexes ; conjugué, propriétés du conjugué ;
- ✔ équations ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 5 à 18

Formes trigonométriques et exponentielles

- ✔ approche graphique des nombres complexes ;
- ✔ forme trigonométrique ;
- ✔ formule d'Euler ;
- ✔ forme exponentielle ;
- ✔ opérations avec les formes trigonométrique/exponentielle ;
- ✔ formule de De Moivre ;
- ✔ résoudre des équations ;

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 19 à 35

Racines de l'unité, factorisation

- ✔ racines de l'unité ;
- ✔ théorèmes sur la factorisation dans $\mathbb{C}$;

Voir la théorie 8 et les exercices 36 à 39

Fonctions complexes

- ✔ notion de fonction complexe ;
- ✔ point fixe d'une fonction complexe.

Voir la théorie 9 et les exercices 40 à 42

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...
https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/4e/complements/chAv1

Notes personnelles

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....