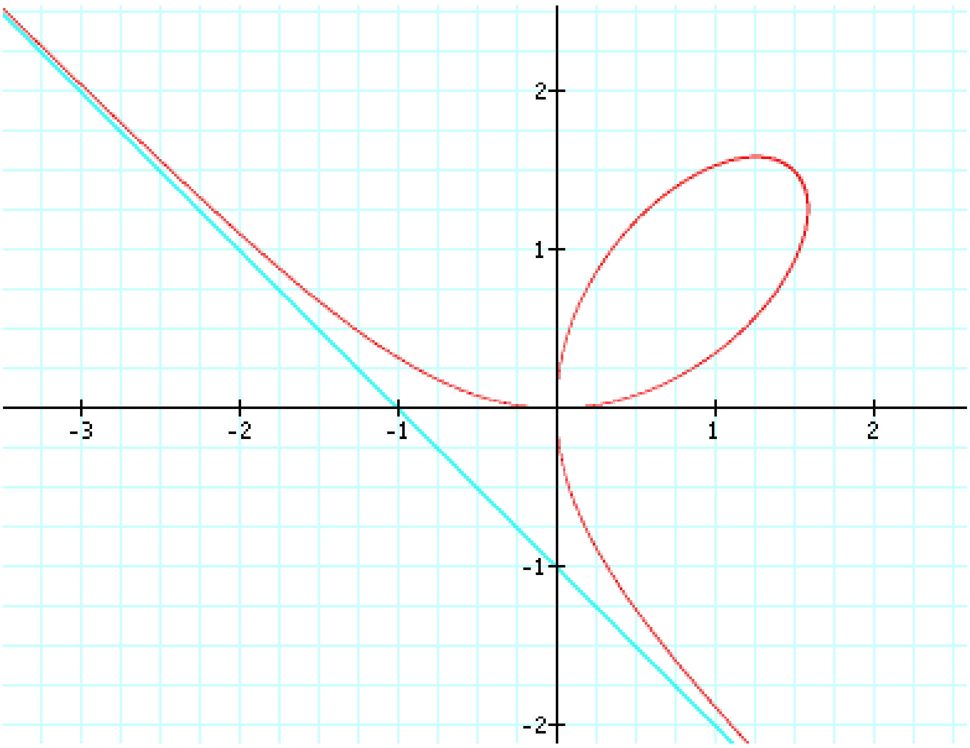


Le folium de Descartes

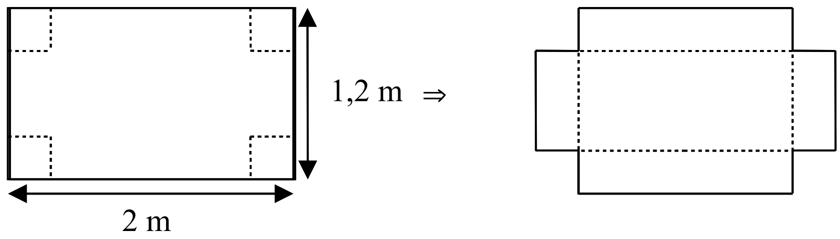
Problème

Deux voitures partent en même temps la première de Numcity vers Algcity et l'autre de Algcity vers Numcity, ces deux villes étant éloignées de 200 km. Elles roulent à des vitesses constantes différentes s'exprimant par des nombres entiers de km/h dont la différence est un multiple de 7. Après deux heures de déplacement la distance entre la voiture la plus rapide et Algcity était cinq fois plus petite que celle entre la voiture la plus lente et Numcity. Quelle est la vitesse de la voiture la plus rapide ? Donner la réponse en km/h.

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Déménagement

Vous disposez d'un stock de plaques rectangulaires au contour rigide, mesurant 1,2 mètres de large et 2 mètres de long. Pour votre prochain déménagement, vous désirez construire des cartons, ouverts vers le haut (en forme de parallélépipèdes rectangles) selon le procédé suivant : on découpe dans les quatre coins de la plaque le même carré, puis on plie les côtés et on les scotche pour former la boîte.



Comment obtenir des cartons de volume maximal ?

2 [Activité] Population

Une population de 25000 individus (au temps t=0) croît selon la formule $N(t)=25000+45t^2$, où t est mesuré en jours.

a. Calculer la **vitesse moyenne** à laquelle croît la population entre les instants donnés :

i $t_1=0$ et $t_2=2$

ii $t_1=2$ et $t_2=3$

iii $t_1=1$ et $t_2=4$

iv $t_1=2$ et $t_2=5$

b. Calculer la **vitesse instantanée** de la croissance à l'instant t = 2.

3 [Activité] Taux de variation

On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^2-1$.

a. Quel est le **taux (moyen) de variation** entre :

i $(0;f(0))$ et $(2;f(2))$?

ii $(0;f(0))$ et $(1;f(1))$?

b. Quel est le **taux instantané de variation** en :

i $(0;f(0))$?

ii $(1;f(1))$?

iii $(2;f(2))$?

c. Que peut-on dire de la **pente de la droite tangente** à la courbe représentative de f en :

i $(0;f(0))$?

ii $(1;f(1))$?

iii $(2;f(2))$?

Interpréter graphiquement l'exercice.

4 [Activité] Nombre dérivé

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2x}$.

a. Calculer le taux de variation de la fonction f entre deux points d'abscisses 1 et x.

b. Calculer le **nombre dérivé** de la fonction f en 1 et interpréter graphiquement.

5 [Activité] Toujours possible ?

On considère la fonction f définie par $f(x)=|x-1|$

a. Représenter graphiquement cette fonction.

b. Estimer graphiquement $f'(2)$ et $f'(0)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(0)$.

d. Estimer graphiquement $f'(1)$.

e. Calculer $f'(1)$.

f. Comment s'exprime graphiquement une situation de non dérivabilité ?

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 6

6 [Activité] Fonction dérivée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2x}$

a. Calculer le taux de variation de la fonction f entre deux points d'abscisses a et x.

b. Calculer le **nombre dérivé** de la fonction f entre deux points d'abscisses a et x.

On obtient une nouvelle fonction : **la dérivée de f**.

c. Existe-t-il un point du graphe de f en lequel la tangente à la courbe représentative de f (ou par raccourci « à f») est horizontale ? Justifier et interpréter graphiquement.

d. En quel(s) point(s) du graphe de f a pente de la tangente à f a-t-elle une pente égale à -1/12.

7 [Activité] Notations

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-1$.

a. Déterminer la dérivée de f en a.

b. Interpréter graphiquement.

a. Considérer x et $x+h$ au lieu de a et x et déterminer la dérivée de f en x.

8 [Activité] Equation de la tangente

On considère une fonction dérivable en $(a;f(a))$ et on s'intéresse à la tangente à (la courbe représentative de) f en $(a;f(a))$. Ecrire une conjecture quant à son équation, l'illustrer et la démontrer.

9 [Avancé] Tangentes extérieures

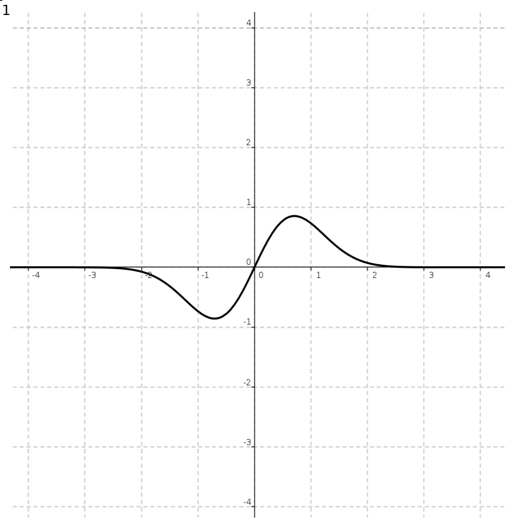
a. Déterminer les coordonnées d'un point P tel que la tangente à la courbe représentative de $f(x)=\frac{x-4}{x+5}$ au point P passe par l'origine (0; 0) du repère (s'il y a plusieurs solutions, les trouver toutes).

b. Vérifier graphiquement en représentant la courbe et les tangentes trouvées.

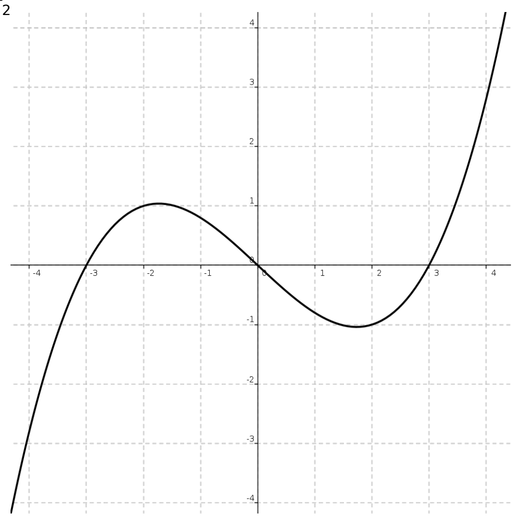
10 [Activité] Graphiquement

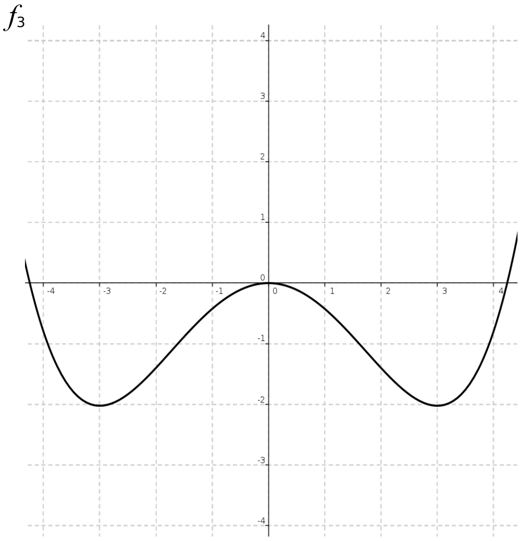
1. Parmi les fonctions représentées ci-dessous, certaines sont dérivées d'une autre. Il s'agit de les retrouver :

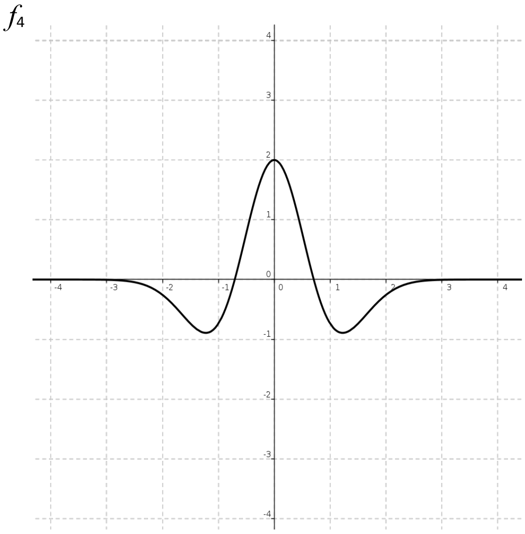
f_1

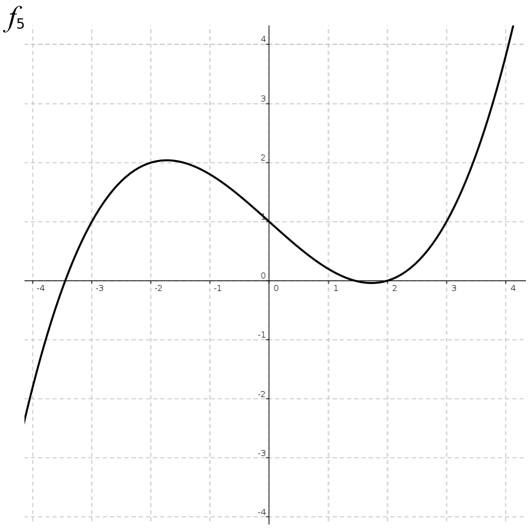


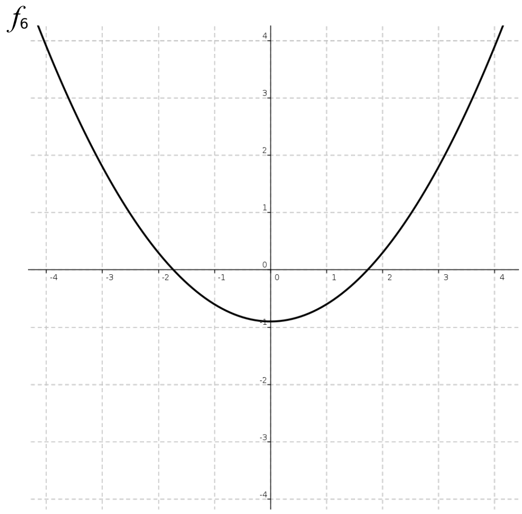
f_2



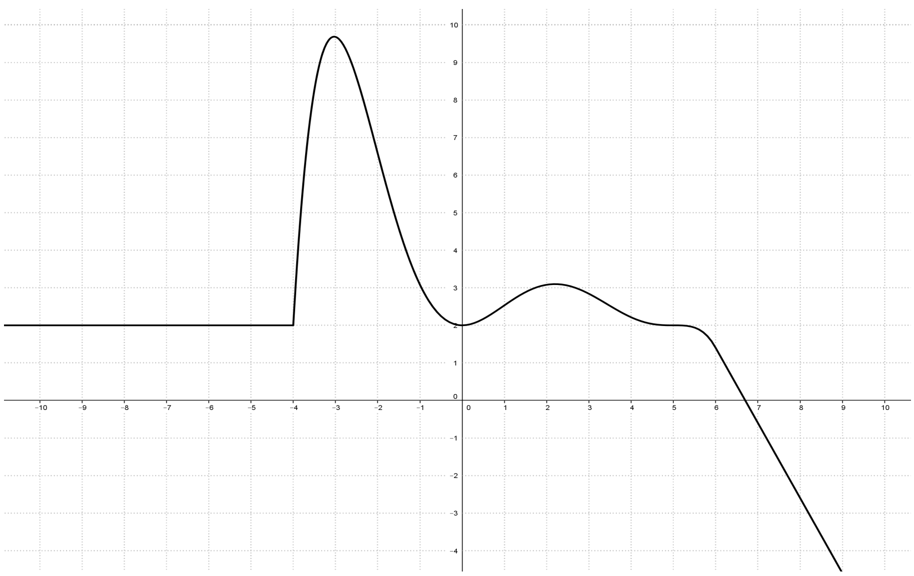








2. Représenter dans le même repère et de façon suffisamment précise la dérivée de la fonction f donnée :



Prérequis et activités de découverte

11 [Activité] Vrai ou faux ?

Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et si $a \in I$, alors f est dérivable en a.

b. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$. Si a et b sont deux nombres réels quelconques, alors le taux de variation moyen de f entre a et b est égal à $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Voir la théorie 4 à 7 et les exercices 7 à 18

12 [Activité] Formules de dérivation

1. Rappels de fonctions élémentaires dont on a calculé la dérivée à l'aide de la définition :

[D1] $cte'=0$

[D2] $x'=1$

[D3] $(ax+b)'=a$

[D4] $(x^2)'=2x$

[D5] $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$

[D6] $(x^3)'=3x^2$

[D7] $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

[D8] $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2. Il est possible d'accélérer le calcul de $f'(x)$, sans avoir besoin de passer par de fastidieux calculs de limites … Dans la table numérique, on trouve un formulaire de ce genre :

[PrD1] $[\text{cte}\cdot f]'=\text{cte}\cdot f'$

[PrD2] $[f+g]'=f'+g'$

[PrD3] $[f-g]'=f'-g'$

[PrD4] $[f\cdot g]'=f'\cdot g+f\cdot g'$

[PrD5] $\left[\frac{1}{f}\right]'=-\frac{f'}{f^2}$

[PrD6] $\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

[PrD7] $\left[\frac{cte}{f}\right]'=-\frac{cte\cdot f'}{f^2}$

[PrD8] $\left([f(x)]^n\right)'=n[f(x)^{n-1}]\cdot f'(x),\ \forall n\in\mathbb{R}$

[PrD9] $[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$

Les utiliser pour calculer les dérivées des fonctions suivantes, en donnant les réponses sans racine au dénominateur et sans exposant numérique négatif ou fractionnaire :

a. $f(x)=3x$

b. $f(x)=ax+b$, avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

c. $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b,c\in\mathbb{R}$

d. $f(x)=\frac{1}{x}$

e. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

f. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

g. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

h. $f(x)=-\frac{2}{x^3}$

3. Reprendre l'activité 1 et la résoudre en utilisant les formules de dérivation.

4. On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$

a. Calculer la dérivée de f.

b. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point (0;0).

c. Trouvez un autre point du graphe de f en lequel la tangente est parallèle à la précédente.

d. Déterminer les (deux !) coordonnées des points de la courbe représentative de f en lesquels la tangente est horizontale.

e. Utiliser vos résultats pour tracer la courbe représentative de la fonction f et les tangentes trouvées aux questions b. et c.

13 [Activité] Une dérivée importante

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^n$, avec $n\in\mathbb{R}$

a. Calculer $f'(x)$ pour $n=1$, $n=2$, $n=0$, $n=0{,}5$.

b. Enoncer une conjecture.

c. * La démontrer dans les cas suivants :

i $n\in\mathbb{N}^*$

ii $n\in\mathbb{Z}_-$

iii n de la forme $\frac{1}{m}$ avec $m\in\mathbb{N}^*$

iv $n\in\mathbb{Q}$

Voir la théorie 8 et les exercices 19 à 20

14 [Activité] Extrema de f en a et dérivée $f'(a)$

Nous avons vu que l'intention qui a justifié la construction de l'outil dérivée était la recherche d'extrema locaux d'une fonction donnée. Il s'agit maintenant d'aller au bout de cette démarche et d'expliciter le lien qui existe entre dérivée de f et extrema locaux de f '.

1. Donner une définition précise de la notion d'**extremum global et local**. Illustrer avec des exemples.

2. Utiliser GeoGebra pour représenter des fonctions polynomiales et leur dérivées en explorant le lien supposé entre dérivée de f et extrema locaux de f '.

3. Que penser en particulier des conjectures suivantes :

Conjecture 1 : Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que $f'(a)=0$, alors f admet un extremum local en a.

Conjecture 2 : Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$

a. Laquelle de ces deux conjectures nous intéresse le plus ? Pourquoi ?

b. Ces conjectures sont-elles vraies ?

c. Que déduire de tout cela?

4. Un **point critique** est un zéro de la dérivée. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Conjecture 1 : Si f admet un point critique en a, alors $f'(a)=0$

b. Conjecture 2 : Un calcul de dérivée est toujours une indétermination de type $"\frac{0}{0}"$

Voir la théorie 9 et les exercices 21 à 22

15 [Activité] (Dé)croissance de f en a et signe de $f'(a)$

Nous avons vu que l'intention qui a justifié la construction de l'outil dérivée était la recherche d'extrema locaux d'une fonction donnée. Il s'agit maintenant d'aller au bout de cette démarche et d'expliciter le lien qui existe entre dérivée de f et extrema locaux de f'. Il nous faut passer à une étude plus globale du comportement de f…

1. Donner une définition précise de la notion de **(dé)croissance** et de **(dé)croissance stricte** d'une fonction. Illustrer avec des exemples.

2. On considérer le théorème suivant :

Soit f définie sur un intervalle I. Alors on a :

si $f'(x)>0, \forall x \in I$, alors f est croissante sur I

si $f'(x)<0, \forall x \in I$, alors f est décroissante sur I

si $f'(x)=0, \forall x \in I$, alors f est constante sur I

Illustrer ce théorème avec des exemples.

16 [Avancé] Deuxième dérivée ?

1. Donner la définition de la notion de **deuxième dérivée** de f en illustrant avec des exemples.

2. Que peut-on dire de la deuxième dérivée en $a=0$ des fonctions f et g définies par $f(x)=x^3$ et $g(x)=\sqrt[3]{x}$

3. Illustrer l'intérêt de cette notion en considérant la fonction f définie par $f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{8}$.

Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 23 à 37

17 [Activité] Optimisation

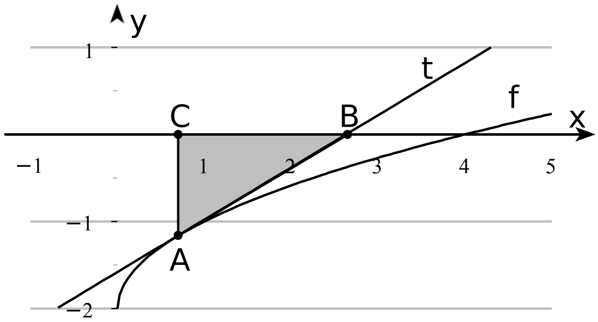
1. Reprendre le problème initial de déménagement et le résoudre enfin complètement.

2. Une personne désire clôturer un terrain rectangulaire de 400 mètres carrés dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions x et y du terrain pour que la longueur de la clôture soit minimale.

3. Enoncer une méthode pour résoudre les problèmes d'optimisation.

18 [Avancé] Optimisation +

On considère la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}-2$ et un point $A(a; f(a))$ de cette courbe avec $a < 4$.



La tangente à f en A coupe l'axe Ox en B. On s'intéresse à l'aire du triangle ABC, où $C(a; 0)$ est le point de l'axe Ox d'abscisse a.

a. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $a\sqrt{a}-4a+4\sqrt{a}$

b. Déterminer la valeur de a pour que cette aire soit maximale.

Voir la théorie 12 et les exercices 38 à 47

19 [Activité] Asymptotes

1. Définir et illustrer les notions d'**asymptote verticale et horizontale**.

2. Vrai ou faux ? Justifier.

a. Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes horizontales ?

b. La courbe représentative d'une fonction ne coupe jamais son asymptote horizontale.

c. La courbe représentative d'une fonction ne coupe jamais son asymptote verticale.

3. Déterminer toutes les asymptotes de la fonction f déterminée par $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x^2+2x-4}$ et interpréter graphiquement.

20 [Avancé] Asymptotes obliques

Lorsqu'on étudie une fonction, on n'a parfois besoin pour produire une représentation graphique de qualité de récolter plus d'informations que ce qu'on sait déjà faire.

1. Définir et illustrer la notion d'**asymptote oblique**.

2. Considérons les deux fonctions définies ainsi : $f(x)=\frac{1}{x^2-1}+2x-1$ et $g(x)=\frac{2x^2-1}{x-1}$.

a. Déterminer leurs asymptotes obliques.

b. Interpréter graphiquement.

21 [Avancé] Tout en un

Déterminer toutes asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x^4+4x^3-2x^2}{-x^3+x^2+x-1}$ et interpréter graphiquement.

22 [Avancé] Double asymptote

Déterminer toutes asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ et interpréter graphiquement.

23 [Activité] Etude de fonction

Etudier les fonctions définies par ;

a. $f(x)=x^3-4x$

b. $f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{8}$

c. $f(x)=\frac{2x^2+2x-12}{3x-2-x^2}$

24 [Avancé] Etude de fonction

Etudier les fonctions définies par ;

a. $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

b. $f(x)=\frac{(x-1)^3}{4(x^2+1)^2}$

25 [Avancé] Approche physique de la notion de dérivée

On appelle mouvement rectiligne un mouvement au cours duquel un objet se déplace suivant une ligne droite.

La vitesse moyenne v d'un objet qui parcourt une distance d en un temps t est $v=\frac{d}{t}$.

La vitesse de P à l'instant t (aussi appelée vitesse instantanée de P en t) est définie par $v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$

Similairement, l'accélération de P en t est définie par $a(t)=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$.

v est la fonction vitesse de P et a la fonction accélération de P.

On tire un projectile à la verticale avec une vitesse initiale de 120 m/s. Après t secondes, selon les lois de la physique, sa distance au sol est donnée par $r(t)=120t-5t^2$.

a. Calculer le moment et la vitesse auxquels le projectile s'écrase au sol.

b. Calculer l'altitude la plus élevée que le projectile atteigne.

c. A quelle accélération le projectile est-il constamment soumis ?

26 [Aller plus loin] Dérivées et économie

L'analyse est aussi un puissant outil pour résoudre les problèmes qui se présentent dans le domaine de l'économie. Quand une fonction f décrit une grandeur économique, on emploie l'adjectif marginal pour caractériser sa dérivée f'.

A propos de la quantité x d'un bien. les économistes parlent des fonctions C, c, R et P pour désigner :

- Le coût de production $C(x)$ de x unités;
- Le coût moyen c de production d'une unité, défini par $c(x)=\frac{C(x)}{x}$;
- La recette $R(x)$ de la vente de x unités ;
- Le profit de la vente de x unités P défini par $P(x)=R(x)-C(x)$

La variable x est traitée comme un nombre réel même si, dans un tel contexte, elle ne prend le plus souvent que des valeurs entières. De plus, on a $x\geq 0$, puisque la production d'un nombre négatif d'unités n'a pas de sens !

Un fabricant de cassettes magnétiques dont les coûts mensuels fixes de production s'élèvent à 8400 ECU et le coût de production par cassette à 10 ECU, les vend à 17 ECU pièce.

d. Trouver les expressions de $C(x), c(x), R(x)$ et $P(x)$.

e. Quelles sont les valeurs de ces fonctions lorsque $x=1000$?

f. Combien de cassettes doit-il fabriquer pour être en équilibre financier ?

Les dérivées $C', c'. R'$ et P' des fonctions C, c, R et P portent 1e nom de coût marginal, coût moyen marginal, recette marginale et profit marginal, respectivement.

La valeur $C'(x)$ représente le coût marginal associé à la production de x unités du bien. Or la dérivée est un taux de variation, donc $C'(x)$ traduit le taux de variation du coût en fonction du nombre d'unités produites.

La même interprétation peut être donnée à propos de $c'(x). R'(x)$ et $P'(x)$.

Pour la fonction de coût C et n un entier positif on a, par la définition de la dérivée : $C'(n)=\lim_{h\to 0}\frac{C(n+h)-C(n)}{h}$

Donc, si h est petit : $C'(n)\simeq\frac{C(n+1)-C(n)}{h}$

Lorsque le nombre d'unités produites est grand, les économistes considèrent que ce dernier quotient avec $h=1$ est une bonne approximation du coût marginal, soit : $C'(n)\simeq C(n+1)-C(n)$

Dans ces conditions, le coût marginal associé à la production de n unités d'un bien est (approximativement) le coût de la production d'une unité supplémentaire. Certaines entreprises décrivent leurs coûts de production par une fonction du type : $C(x)=a+bx+dx^2+kx^3$

La constante a représente les frais généraux comme le loyer, le chauffage, l'éclairage qui sont indépendants du nombre d'unités produites.

Si b est le coût de production d'une unité et qu'aucun autre facteur n'intervient dans la production, alors bx représente le coût de la production de x unités du bien. Les termes dx^2 et kx^3 n'affecteront significativement le coût de production que pour de grandes valeurs de x.

Une firme fabrique le mécanisme électronique d'un jouet. Elle estime que le coût (en ECU) de fabrication de x mécanismes est donné par $C(x)=200+0.05x+0.0001x^2$.

g. Quel est le coût total, le coût moyen et le coût marginal de la production de 500 unités, 1000 unités et 5000 unités?

h. Comparer le coût marginal de la production de 1000 unités avec le coût de production de la mille et unième unité.

Une ébénisterie fabrique des copies de bureau de style 18e siècle. Elle estime le coût hebdomadaire de fabrication de x bureau (en ECU) à $C(x)=x^3-3x^2-80x+500$ et les vend 2440 ECU pièce.

i. Combien de bureaux doit-elle produire et vendre chaque semaine pour maximiser son profit?

j. A combien se monte ce profit hebdomadaire?

Pour déterminer le prix de vente d'un bien qu'elle fabrique, une entreprise doit tenir compte de plusieurs facteurs. Outre le coût de production et le profit souhaité. l'entreprise doit connaître l'impact d'un changement de prix sur la demande du consommateur. Certains biens, dits de nécessité, connaissent une demande quasi constante, indépendante d'une modification du prix. Mais d'autres biens dont le prix augmente risquent fort d'être moins demandés. Généralement. une entreprise peut estimer sur la base de l'expérience passée combien d'unités seront vendues en fonction du prix unitaire pratiqué où $p(x)$ est p une certaine fonction. A une demande de x unités correspond le prix unitaire . $p(x)$. Voilà pourquoi la fonction p est appelée fonction de demande d'un bien. La recette totale est alors le produit du nombre d'unités vendues par le prix unitaire, soit $R(x)=x\cdot p(x)$.

La demande marginale est la dérivée de p'.

Désignons par $S=p(x)$ le prix de vente unitaire associé à une demande de x unités. La fonction de demande est le plus souvent décroissante, donc $p'(x)<0$ quel que soit x. Les fonctions de demande se présentent parfois implicitement par une équation qui fait intervenir S et x.

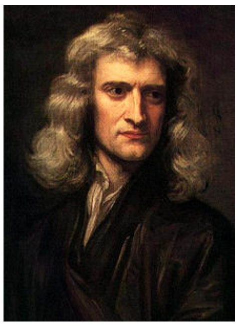
La demande de x unités d'un produit est reliée à son prix de S ECU pièce par l'équation $2x+S^2-12000=0$.

k. Donner l'expression de la demande, de la demande marginale, de la recette et de la recette marginale.

l. Quelles sont les valeurs de x et de $p(x)$ qui conduisent à une recette maximale?

m. Quel est le montant de cette recette maximale?

27 [Avancé] Histoire


http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton


https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

Deux personnages historiques « immenses » sont à l'origine du « calcul différentiel et intégral » : Newton et Leibnitz. Les deux hommes s'en sont disputé la paternité ...

On vous propose ici de partir à la recherche d'informations fiables pour raconter à votre manière cette histoire.

Vous devez citer toutes vos sources avec précision.

Votre texte doit faire entre 2 et 4 pages manuscrites. On doit en particulier y trouver les éléments suivants :

- les pays d'origine et années de naissance et de décès de Newton et de Leibnitz, ainsi que quelques éléments bibliographiques marquants les concernant ;
- leur statut social ;
- leurs domaines d'étude ;
- leurs principaux ouvrages ;
- leur place dans la découverte du calcul infinitésimal ;
- la controverse sur la paternité de cette découverte ;
- finalement, aujourd'hui, ce qu'on dit de cette paternité.

Voir la théorie 13 à 15 et les exercices 48 à 61

1 [A savoir] Taux de variation

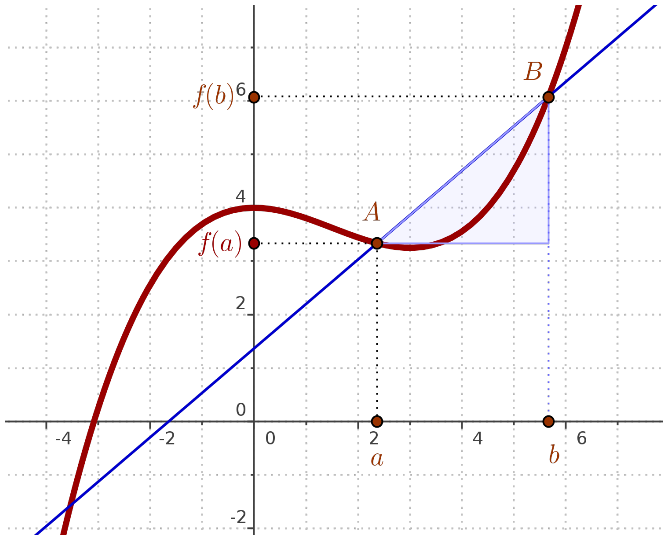
Définition

Soit une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert) et $a \in I$
Le **taux de variation** de f entre (a;f(a)) et (b;f(b)), aussi appelé **quotient de Newton**, est le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interprétation géométrique

Le taux de variation de f entre (a;f(a)) et (b;f(b)), est la **pente de la sécante** passant par (a;f(a)) et (b;f(b)).

Illustration :



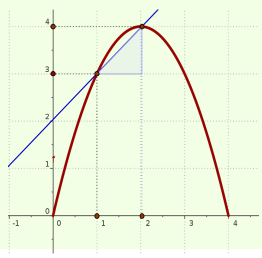
Exemple 1: calculer le taux de variation de la fonction f définie par $f(x)=x^2-4$ entre (1;f(1)) et (2;f(2))

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

Exemple 2: une fonction d [en mètres] définie par $d(t)=4t-t^2$ modélise le déplacement d'un objet en fonction du temps t [en secondes]. Calculer sa vitesse moyenne entre t=1 et t=2.

La vitesse est donnée par $v=\dfrac{d}{t}$. Entre t=1 et t=2, la vitesse moyenne est donnée par le taux de variation

$$\frac{d(2)-d(1)}{2-1}=(4\cdot 2-2^2)-(4\cdot 1-1^2)=1\,\frac{m}{s}$$



Remarque : si on renomme le deuxième point, le taux de variation de f entre (a;f(a)) et ($a+h$;f($a+h$)), est donné par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2 [A savoir] Nombre dérivé, pente de tangente

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Considérons la limite suivante : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Si cette limite existe dans $\mathbb{R}$, appelons-là L. Elle s appelle alors **nombre dérivé** de f en a.

On la note $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Si $f'(a)$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est **dérivable** en a.

sinon - si cette limite n'existe pas ou si elle est infinie - on dit que la fonction f n'est **pas dérivable** en a.

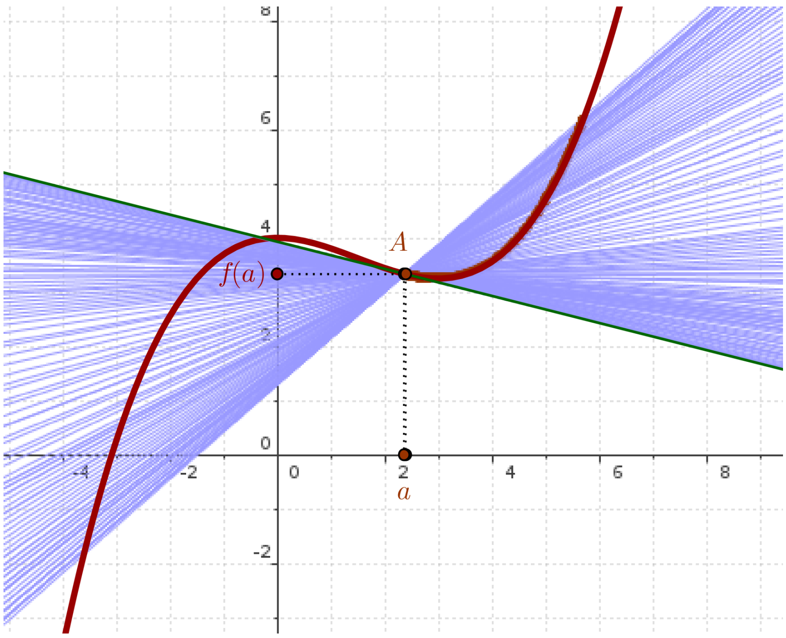
Si on change le nom des variables : de a et $a+h$ vers a et x, on obtient :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque : l'intervalle I doit être ouvert ; en effet, s'il était fermé, on ne pourrait pas considérer la limite pour les valeurs de a sur les bords de l'intervalle !

Définition

Soient A et B deux points d'une courbe C et s la sécante passant par A et B. Géométriquement, la **tangente à la courbe** en A est la position limite de la sécante s lorsque B tend vers A.

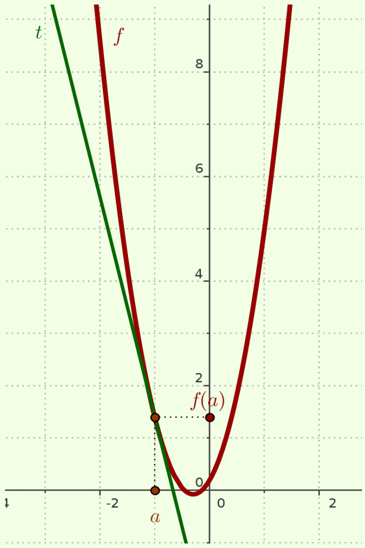


Interprétation géométrique

La dérivée d'une fonction f en a est égale, si elle existe, à la **pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a;f(a))$.**

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x)=3x^2$. A partir de la définition du nombre dérivé de f en -1, calculer $f'(a)$ et interpréter graphiquement

$$\begin{aligned}
f'(-1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3(-1+h)^2-3(-1)^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3(h^2-2h+1)-3\cdot 1}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-6h+3-3}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-6h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3h(h-2)}{h}\\
&\overset{car\, h\neq 0}{=}\lim_{h\to 0}3(h-2)\\
&\overset{PrL\,7}{=}3\cdot(-2)=-6
\end{aligned}$$



3 [A savoir] Non dérivabilité

Certaines fonction peuvent ne pas être dérivables en certains points (certaines ne sont même pas dérivables en tous points!).

Exemple 1 : on considère la fonction f définie par $f(x)=|x|$.

rappel : $|x|$ s'appelle la **valeur absolue** de x ; elle est définie ainsi : $|x|=\begin{cases}x\,,\text{ si } & x\geq 0\\ -x\,,\text{ si } & x<0\end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$$

problème : la valeur absolue de h est différente selon que h soit positif ou négatif ; il faut considérer les limites à gauche et à droite : $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$ et

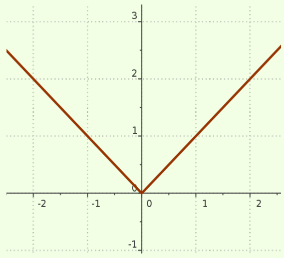
$$\lim_{h\to 0^{10}-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$

on en conclut que $\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$ n'existe pas, et donc que f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique : cela correspond à un « pic » de la courbe représentative de f :

en tendant vers 0 par la droite, la pente de la tangente (à f en (0;0)) vaut toujours 1 alors que par la gauche, elle vaut toujours -1 !

remarque : la tangente et la droite sont confondues quand x tend vers 1 par la gauche puis par la droite.

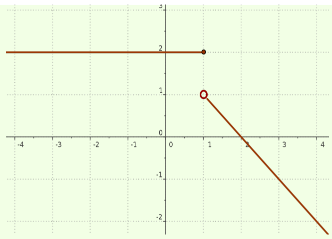


Plus généralement, tout « pic » dans la courbe représentative d'une fonction indique un point de non dérivabilité.

Exemple 2: justifier graphiquement pourquoi la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} 2, si\ x\leq 1 \\ -x+1, si\ x>1 \end{cases}$. n'est pas dérivable en 1

en tendant vers 1 par la droite, la pente de la tangente (à f en (1;f(1))) – est égale à -1 ; par contre, en tendant vers 1 par la gauche, elle vaut 2 !

La dérivée n'existe donc pas en 1.



Voir les exercices 1 à 6

4 [A savoir] Fonction dérivée

Définition

Soit une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable en tout $a \in I$.
On appelle **fonction dérivée** de la fonction f, ou plus simplement **dérivée de f** , la fonction f' qui à chaque $x \in I$ fait correspondre la dérivée de f en x, soit

$$f': \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f'(x) \end{array}$$

Plus précisément, f' est définie ainsi:

f' est la fonction $f': I \to \mathbb{R}$ telle que $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x)=3x^2$. Déterminer $f'(x)$ à partir de la définition de la (fonction)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{3h(2x+h)}{h}$$
$$\overset{car\, h\neq 0}{=} \lim_{h\to 0} 3(2x+h) \quad =3\cdot(2x+0)=6x$$

5 [A savoir] Représentation graphique de la dérivée

Méthode

Soit une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ dont on donne une représentation graphique. On demande de représenter graphiquement dans le même repère sa dérivée.
□ On identifie les points de tangente horizontale ; ils correspondent à des dérivées nulles ;
□ on identifie d'éventuels intervalles où la pente de la tangente est facilement calculable (f constante ou affine) ; cela correspond à des valeurs constantes de la dérivée ;
□ on identifie les intervalles où la pente de la tangente est positive (ou négative) ; la dérivée sera positive (ou négative) ;
□ on estime quelques pentes de tangentes intéressantes qu'on reporte comme valeurs de la dérivée.

6 [A savoir] Equation de la tangente

Théorème

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout $a \in I$.
L'**équation de la tangente à *f* au point (*a*;*f*(*a*)).** est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exemple : on considère la fonction *f* définie par $f(x)=3x^2$. Déterminer l'équation de la tangente en (-1;*f*(-1)).

Nous avons déjà calculé plus haut que $f'(-1)=-6$, et on a *f*(-1)=3.

On a donc : $y=-6(x-(-1))+3=-6x-3$

Remarque : sans connaître le théorème, on aurait aussi pu procéder ainsi : comme $f'(-1)=-6$, on sait que $y=-6x+q$. On a aussi : *f*(-1)=3, ce qui signifie que $3=-6\cdot(-1)+q \Leftrightarrow -3=q$ et donc $y=-6x-3$

7 [A savoir] Bilan intermédiaire

Nous avons pu dans les exercices, à l'aide de la définition de la dérivée, déterminer la dérivée *f* ' d'un certain nombre de fonctions *f* données.

Notation

Si on doit déterminer la (fonction) dérivée de la fonction *f*, par exemple définie par $f(x)=x^2+3x$, on écrira plus simplement $(x^2+3x)'=...$

Dérivées de fonctions élémentaires

[D1] $cte'=0$
[D2] $x'=1$
[D3] $(ax+b)'=a$
[D4] $(x^2)'=2x$
[D5] $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$
[D6] $(x^3)'=3x^2$
[D7] $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
[D8] $(\frac{1}{x})'=-(\frac{1}{x^2})$

Exemples : déterminer $(x^{23})'$, $(x^{-5})'$, $(x^{\frac{4}{3}})'$, $(x^{\sqrt{2}})'$

$(x^{23})'=23x^{23-1}=x^{22}$; $(x^{-5})'=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}$

$(x^{\frac{4}{3}})'=x^{\frac{4}{3}-1}=x^{\frac{1}{3}}$; $(x^{\sqrt{2}})'=x^{\sqrt{2}-1}$

Voir les exercices 7 à 18

8 [A savoir] Formules de dérivation

Formules de dérivation

[PrD1] $[\text{cte}\cdot f]' = \text{cte}\cdot f'$
[PrD2] $[f+g]' = f' + g'$
[PrD3] $[f-g]' = f' - g'$
[PrD4] $[f\cdot g]' = f'\cdot g + f\cdot g'$
[PrD5] $[\frac{1}{f}]' = -\frac{f'}{f^2}$
[PrD6] $[\frac{f}{g}]' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
[PrD7] $[\frac{cte}{f}]' = -\frac{cte\cdot f'}{f^2}$
[PrD8] $([f(x)]^n)' = n[f(x)^{n-1}]\cdot f'(x), \forall n \in \mathbb{R}$
[PrD9] $[g(f(x))]' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Remarque : nous acceptons pour le moment ces formules sans les démontrer. Nous y reviendrons plus loin et il faudra alors être capable de les énoncer puis de de les démontrer sous forme de théorèmes !

Exemples : déterminer les dérivées des fonctions f définies par f(x)=3x et g(x)=ax2+bx+c

$$(3x)' \overset{\text{PrD1}}{=} 3(x)' \overset{\text{D2}}{=} 3\cdot 1 = 3$$

$$(ax^2+bx+c)' \overset{\text{PrD2}}{=} (ax^2)' + (bx)' + (c)' \overset{\text{D1 et PrD1}}{=} a(x^2)' + b(x)' + 0 \overset{\text{D4 et D3}}{=} a(2x) + b\cdot 1 = 2x + b$$

Dérivées de fonctions élémentaires - suite

[D9] $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$

Voir les exercices 19 à 20

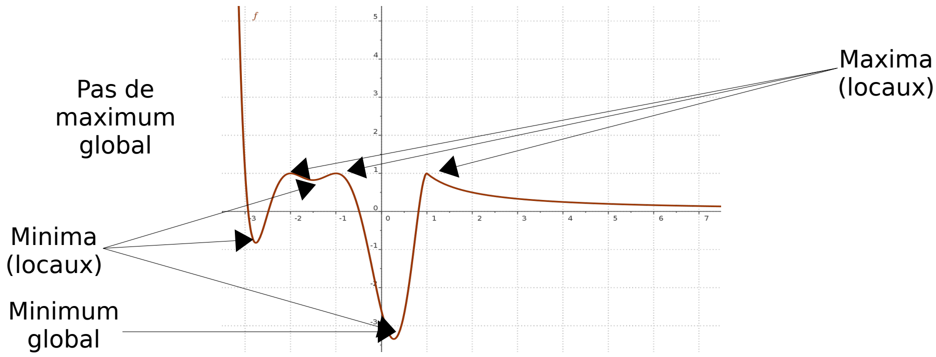
9 [A savoir] Extrema de f et points critiques

Définition

Soit f définie sur un intervalle I et $x \in I$
f admet un **minimum (local)** en a ⇔ ∃ un voisinage V de a tel que $f(a) \leq f(x), \forall x \in V$
f admet un **maximum (local)** en a ⇔ ∃ un voisinage V de a tel que $f(a) \geq f(x), \forall x \in V$
f admet un **minimum global** en a ⇔ $f(a) \leq f(x), \forall x \in D_f$
f admet un **maximum global** en a ⇔ $f(a) \geq f(x), \forall x \in D_f$

Remarque : désormais, lorsqu'on parlera de minimum ou de maximum, sans plus de précision, on pensera toujours minimum ou maximum local.

Illustration :



Conjecture fausse

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que f admet un extremum local en a , alors $f'(a)=0$

Contre-exemple : f définie par $f(x)=|x|$ et $a=0$

Théorème

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que f est dérivable en a et f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$

Remarque : ce théorème n'est guère utile car notre objectif d'utilisation de la dérivée est de nous aider à trouver les extrema de f ; si nous les connaissons déjà, plus besoin de dérivée !

Conjecture fausse

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que $f'(a)=0$, alors f admet un extremum local en a

Contre-exemple : f définie par $f(x)=x^3$ et $a=0$

Définition

Soit f une fonction dérivable en a .
f admet un **point critique** en a $\Leftrightarrow$ $f'(a)=0$

Voir les exercices 21 à 22

10 [A savoir] Signe de f' et (dé)croissance de f

Définition

Soit f définie sur un intervalle I.
f est **croissante** sur I $\Leftrightarrow$ $f(x)\geq f(y), \forall x, y\in I$ tels que $x>y$
f est **strictement croissante** sur I $\Leftrightarrow$ $f(x)>f(y), \forall x, y\in I$ tels que $x>y$
f est **décroissante** sur I $\Leftrightarrow$ $f(x)\leq f(y), \forall x, y\in I$ tels que $x>y$
f est **strictement décroissante** sur I $\Leftrightarrow$ $f(x)<f(y), \forall x, y\in I$ tels que $x>y$

Théorème

Soit f dérivable sur un intervalle I. Alors on a :
si $f'(x)>0, \forall x \in I$, alors f est croissante sur I
si $f'(x)<0, \forall x \in I$, alors f est décroissante sur I
si $f'(x)=0, \forall x \in I$, alors f est constante sur I

Remarque : nous acceptons pour le moment ce théorème sans démonstration ; mais attention, dans un second temps (après Noël), nous y reviendrons et il faudra alors être capable de le démontrer !

Exemple 1 : étudier la (dé)croissance de la fonction f définie par $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ puis la représenter graphiquement.

on calcule la dérivée : $(x^3-6x^2+9x-4)'=3x^2-12x+9$

on la factorise : $f'(x)=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

on construit le tableau de signes de $f'(x)$:

x		1		3	
3	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	0	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

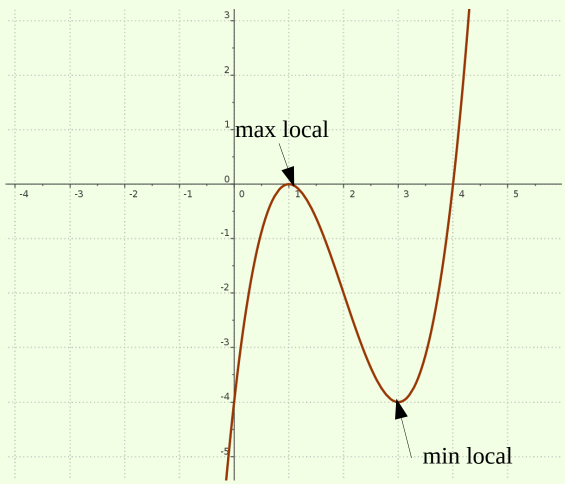
La dernière ligne du tableau donne le comportement de $f(x)$ en termes de (dé)croissance ;

on calcule les points critiques, ici des extrema : $f(1)=...=0$ et $f(3)=...=-4$

On détermine encore, pour produire une représentation graphique de f :

- l'ordonnée à l'origine : $f(0) = -4$

- les zéros : on cherche parmi les diviseurs de 4 et on trouve $f(1) = f(4) = 0$; on utilise la division polynomiale par $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$ et on trouve $f(x)=(x-1)^2(x-4)$, d'où $Z_f=\{1;4\}$



Exemple : étudier la (dé)croissance de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2$ puis la représenter graphiquement.

on calcule la dérivée : $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right)'=x^3-4x^2+4x$

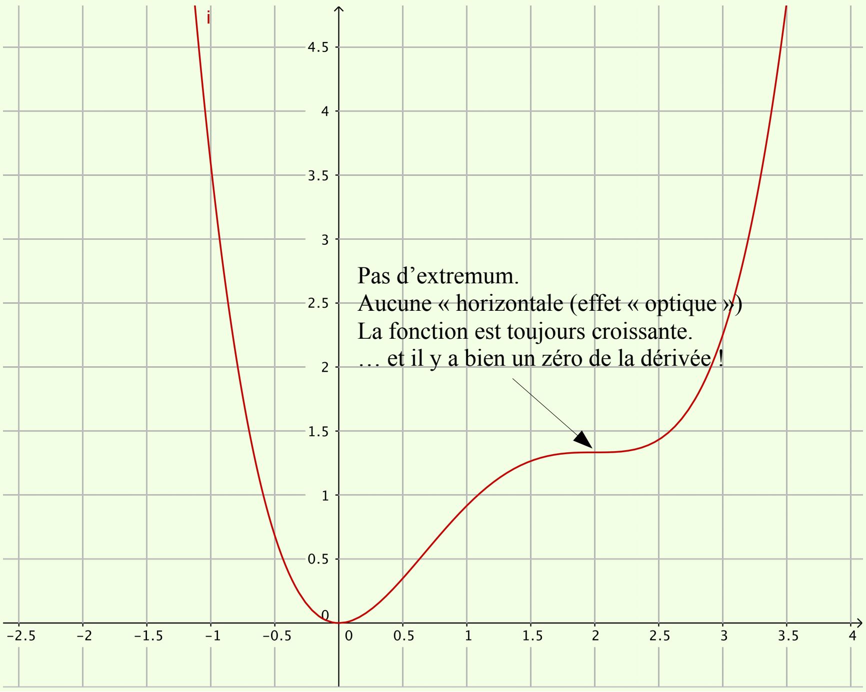
on cherche les zéros de la dérivée : $x^3-4x^2+4x=0 \Leftarrow x(x^2-4x+4)=0 \Leftarrow x(x-2)^2=0$

on construit le tableau de signes de $f'(x)$:

x		0		2	
x	-	0	+	+	+
$(x - 2)^2$	+	+	+	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	min	↗		↗

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2=x^2\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{3}x+2\right)=\frac{1}{12}x^2(3x^2-16x+24)$$

$3x^2-16x+24$ n'est pas factorisable, car $\Delta=-32$, donc $Z_f=\{0\}$



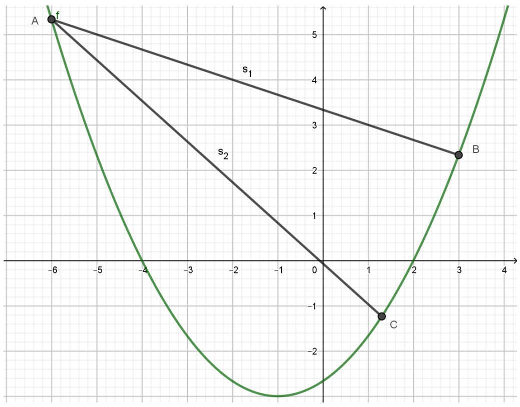
Attention: il existe des fonctions f pour lesquelles $f'(a)=0$ et f n'admet pas d'extremum en a, ou $f'(a)\neq 0$ et f admet un extremum en a. La « simple » connaissance des zéros de la dérivée f' ne suffit donc pas à pouvoir affirmer avec certitude que ceux-ci sont des extrema locaux de f ! Pour une fonction dérivable, l'ensemble des points critiques de f contient mais n'est pas forcément égal à celui des zéros de f' .

Lorsque la fonction est dérivable, il faut toujours faire le tableau de signes complet de la dérivée pour pouvoir bien comprendre la situation.

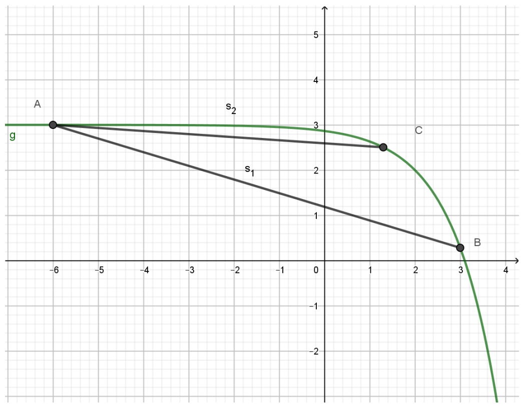
11 [Avancé] Deuxième dérivée

Définition intuitive

Soit f définie sur un intervalle I.
f est **convexe** sur I si et seulement si le segment le segment joignant (a ;$f(a)$) à (b ;$f(b)$) «passe au-dessus du graphe de f», $\forall a, b \in I$
f est **concave** sur I si et seulement si le segment le segment joignant (a ;$f(a)$) à (b ;$f(b)$) «passe au-dessous du graphe de f», $\forall a, b \in I$



SItuation de convexité



SItuation de concavité

Définition formelle

Considérons la situation de convexité précédente : on note $A(a\,;f(a))$, $B(b\,;f(b))$ et $C(x\,;f(x))$. La pente du segment $s_1=[AB]$ est égale à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et celle de $s_2=[AC]$ vaut $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Comme f est convexe, s_1 passe au-dessus de s_2 c'est-à-dire que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

f est (strictement) **convexe** sur I si et seulement si on a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \forall a, x, b \in I \text{ avec } a < x < b$$

f est (strictement) **concave** sur I si et seulement si on a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \forall a, x, b \in I \text{ avec } a < x < b$$

Remarque : contrairement aux notions de minimum/maximum/(dé)croissance où on travaille avec des «plus petit/grand ou égal» dans les définitions, on exclut ici la situation limite d'une droite qui n'est alors ni convexe, ni concave.

Définition

Soit f définie sur un intervalle I.
La **deuxième dérivée** f'' de f (ou **dérivée seconde**) est la dérivée de f'

Définition

Un **point d'inflexion** de f sépare un **domaine de concavité** d'un **domaine de convexité**.

Théorème

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors on a :
si $f''(x)>0, \forall x \in I$, alors f est convexe sur I
si $f''(x)<0, \forall x \in I$, alors f est concave sur I

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{12}(x^4-8x^3+18x^2+x)$. La représenter graphiquement.

on calcule la dérivée :

$$\left(\frac{1}{12}(x^4-8x^3+18x^2+x)\right)'=\frac{1}{12}(x^4-8x^3+18x^2+x)'=\frac{1}{12}(4x^3-24x^2+36x+1)$$

puis la deuxième dérivée :

$$\left(\frac{1}{12}(4x^3-24x^2+36x+1)\right)'=\frac{1}{12}(4x^3-24x^2+36x+1)'=\frac{1}{12}(12x^2-48x+36)=x^2-4x+3$$

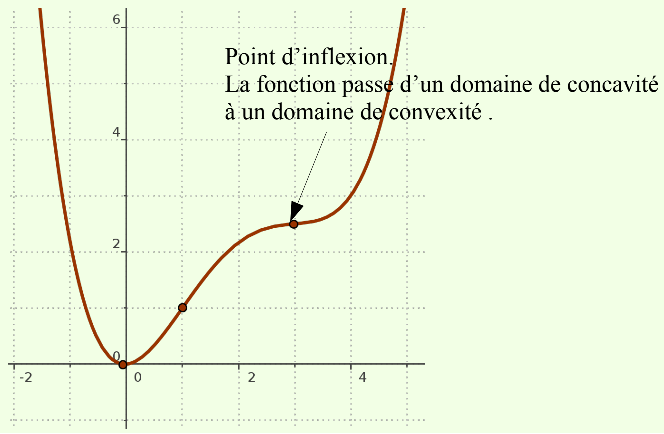
on la factorise : $f''(x)=(x-1)(x-3)$ et on construit le tableau de signes de $f''(x)$:

x		1		3	
$(x$-1)	-	0	+	+	+
$(x$-3)	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	convexe	pt infl	concave	pt infl	convexe

La dernière ligne du tableau donne le comportement de $f(x)$ en termes de convexité/concavité.

On calcule les points d'inflexion : $f(1)=...=1$ et $f(3)=...=2{,}5$

On détermine encore facilement un zéro de f : $f(0)=0$



Attention: il existe des fonctions f pour lesquelles $f''(a)=0$ et f n'admet pas de point d'inflexion en a, ou $f''(a)\neq 0$ et f admet un point d'inflexion en a. La « simple » connaissance des zéros de la deuxième dérivée f'' ne suffit donc pas à pouvoir affirmer avec certitude que ceux-ci sont des points d'inflexion de f ! Lorsque la fonction est deux fois dérivable, il faut toujours faire le tableau de signes complet de la deuxième dérivée pour pouvoir bien comprendre la situation.

Voir les exercices 23 à 37

12 [A savoir] Optimisation

Dans notre contexte, **optimiser** signifie déterminer les extrema d'une situation donnée.

Méthode

1. Identifier et nommer la1. Identifier et nommer la(les) inconnue(s).
2. Identifier ce qui doit être optimisé et l'exprimer algébriquement à l'aide des inconnues.
3. Réduire l'expression à une unique inconnue en utilisant une ou plusieurs relation existant entre les différentes inconnues.
4. On a maintenant une fonction f d'une seule variable qui mesure la quantité à optimiser
5. On dérive f.
6. On factorise f'.
7. On cherche le(s) zéro(s) de f'.
8. On fait le tableau de signes de f'.
9. On identifie la solution (pour toutes les inconnues).
10. On répond à la question, en tenant compte des unités.

Exemple : déterminer deux nombres positifs de somme 8 et dont la somme des carrés soit minimale.

1. Soit x et y les deux nombres
2. La somme des cubes à optimiser : x^2+y^2
3. $x+y=8$, donc $y=8-x$
4. D'où la somme des cubes en fonction de x seul : $f(x)=x^2+(8-x)^2$
5. Dérivée : $f'(x)=(x^2+(8-x)^2)'=2x+2(8-x)\cdot(-1)=2x-2(8-x)=4x-16$
6. Factorisation : $f'(x)=4(x-4)$
7. Zéros de la dérivée : $Z_{f'}=\{4\}$
8. Tableau de signes de la dérivée :

x		4	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

9. $x=4$, d'où $y=8-4=4$
10. Les deux nombres sont 4 et 4

Voir les exercices 38 à 47

13 [A savoir] Asymptotes verticales et horizontales

Définition

On dit qu'une droite verticale d'équation $x=a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

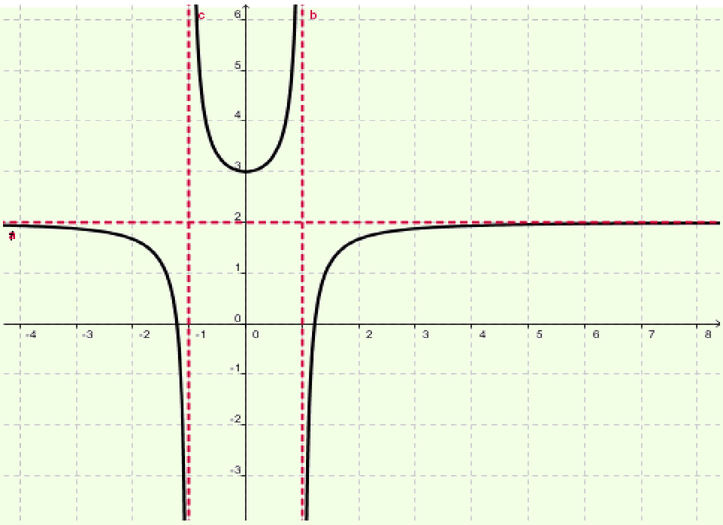
On dit qu'une **droite horizontale** d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la fonction f à si au moins des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \;,\; \lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

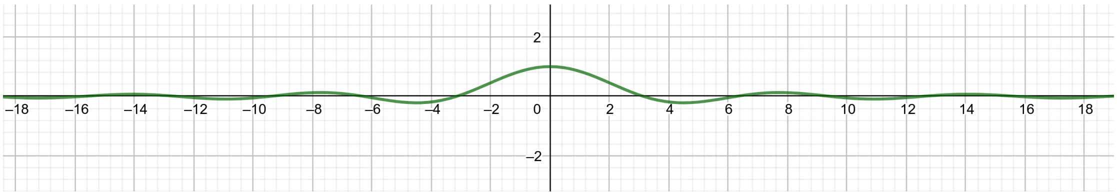
Exemple

x=-1 et x=1 sont deux asymptotes verticales de la fonction ;

y=2 est une asymptote horizontale de la fonction.



Remarque : il est possible d'intersecter une asymptote. Par exemple, y=0 est une asymptote horizontale de la fonction la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$



Méthode pour déterminer les asymptotes verticales dans le cas des fonctions rationnelles.

On analyse les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ pour les a qui ont été exclus du D_f :

□ si la limite est du type $"\dfrac{1}{0}"$, il y a une asymptote verticale ; on calcule les limites à gauche $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et à droite $\lim_{x\to a^+} f(x)$;

□ si la limite est du type $"\dfrac{0}{0}"$, on ne peut encore rien dire ; on calcule la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ qui peut conduire autant à une situation sans asymptote verticale qu'avec.

Exemple : déterminer les asymptotes verticales de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+3x-4}$

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+3x-4}=\dfrac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)}$, d'où $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$

remarque : on peut aussi écrire : $f(x)\overset{si\, x\neq 1}{=}\dfrac{x}{(x+4)}$

□ on étudie la situation pour $x\to-4$:

$$\lim_{x\to -4} f(x) "=" \frac{-4}{0} \text{ de type } \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} \frac{x}{x+4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \text{ et}$$

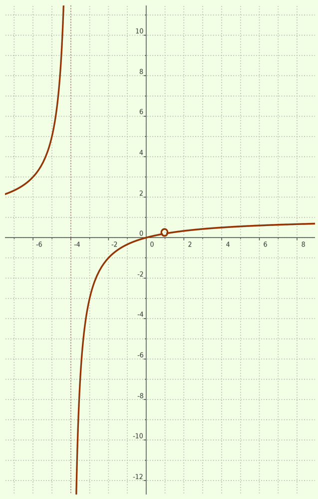
$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{x}{x+4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

x=-4 est une asymptote verticale de f

□ on étudie la situation pour $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

f n'a pas d'asymptote verticale en x=1



Méthode pour déterminer les asymptotes horizontales dans le cas des fonctions rationnelles

Soit f une fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}.$$

Alors on a :

□ si $n = m$, alors $y = \frac{a_n}{b_m}$ est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$;

□ si $n < m$, alors y = 0 est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$;

□ si $n > m$, alors f n'a pas d'asymptote horizontale à $\pm\infty$.

Exemple : déterminer les asymptotes horizontales de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4}$

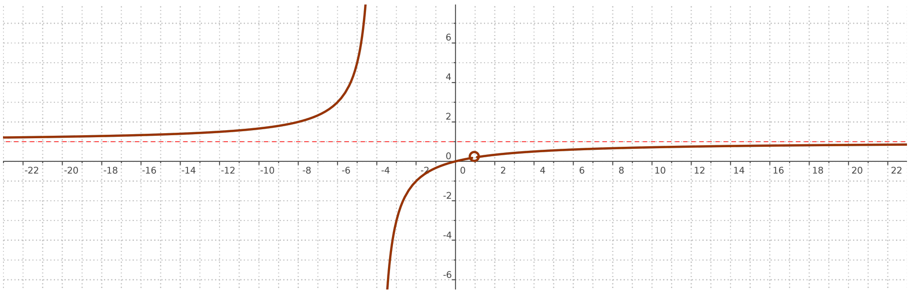
Comme $n = m = 1$, on sait déjà que y = 1 est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$; confirmons par un calcul :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = 1$$

y =1 est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$

remarque : comme on pouvait aussi aussi écrire $f(x) \overset{si\, x \neq 1}{=} \frac{x}{(x+4)}$ (voir l'exemple précédent), on aurait pu faire le calcul suivant :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{4}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$



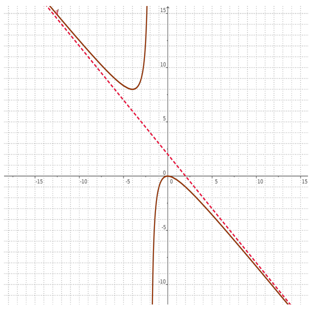
14 [Avancé] Asymptotes obliques

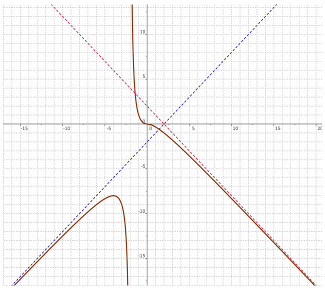
Définition

Une droite d d'équation $d(x)=ax+b$ avec $a\neq 0$ est appelée **asymptote oblique** de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-d(x)=0 \quad \text{et/ou} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-d(x))=0$$

Exemples : la fonction ci-contre admet y = -x+2 comme asymptote oblique à $\pm\infty$, alors que la fonction ci-dessous admet y=-x+2 comme asymptote oblique à $+\infty$ et y=x-2 comme asymptote oblique à $-\infty$





Méthode pour déterminer les asymptotes obliques dans le cas des fonctions rationnelles

Soit f une fonction rationnelle définie par

$$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}.$$

telle que $n = m+1$, alors f admet une asymptote oblique à $\pm\infty$.
La **division polynomiale** du numérateur par le dénominateur de f permet de faire apparaître cette asymptote.

Exemple : déterminer l'asymptote oblique de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^2 & x+2 \\ \cline{3-3}
- & x^2+2x & x-2 \\ \cline{2-2}
 & -2x & \\
- & -2x-4 & \\ \cline{2-2}
 & +4 &
\end{array}$$

d'où on obtient : $x^2=(x+2)(x-2)+4$

puis

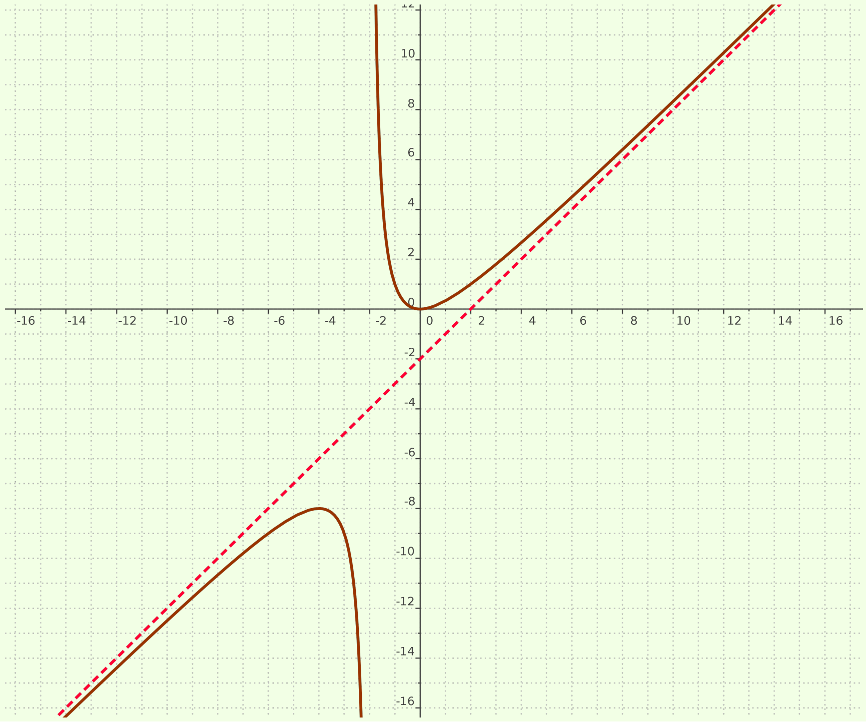
$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}+\frac{4}{x+2}$$

$$=x-2+\frac{4}{x+2}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(x-2)+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}(x-2)+0$$

puis $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \lim_{x\to\pm\infty}(x-2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=0$, c'est-à-dire que y=x-2 est une asymptote oblique de f à $\pm\infty$



Théorème général sur les asymptotes obliques (pour toutes les fonctions)

Si $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, alors la droite d définie par $d(x)=ax+b$ est une asymptote oblique de la fonction f à $\pm\infty$

Exemple : déterminer l'asymptote oblique de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=\frac{1}{1+0}=1=a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2}{x+2}-1\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x+2}$$

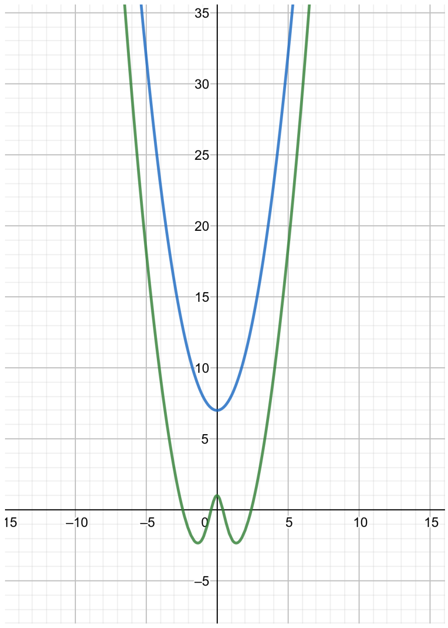
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(-2)}{x(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-2}{1+0}=-2=b$$

donc $y = x$ - 2 est une asymptote oblique de f à $\pm\infty$

Remarque : il existe aussi des asymptotes qui ne sont pas des droites.

Exemple : si on divise $f(x)=x^4-6x^2+1$ par $g(x)=x^2+1$, on obtient

$\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^2+1}=(x^2-7)+\dfrac{8}{x^2+1}$, ce qui montre que la courbe représentative de la fonction g est une **asymptote parabolique** de celle de f.



15 [A savoir] Etude de fonction

Définition

Etudier une fonction, c'est :

1 Déterminer D_f.
2 Déterminer les intersections avec les axes, soit $f(0)$ et Z_f (facultativement son tableau de signes).
3 Déterminer toutes les asymptotes.
4 Calculer la dérivée.
5 La factoriser.
6 Déterminer les zéros de f'.
7 Déterminer les zéros de $f'(x)$ puis tableau de signes de $f'(x)$.
8 En déduire les points critiques de $f'(x)$ (deux coordonnées).
9 * Selon les indications du professeur :calculer ou non la deuxième dérivée, la factoriser, déterminer ses zéros et son tableau de signes ; en déduire la concavité/convexité de f et les points d'inflexion.
10 Représenter graphiquement f en utilisant toutes les informations récoltées jusque-là (si nécessaire calculer encore quelques images).

Exemple : étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$.

On a : $f(x)=\underbrace{\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}}_{\text{forme développée}}=\underbrace{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x+1)}}_{\text{forme factorisée}}\overset{si\ x\neq 1}{=}\dfrac{x-1}{x-4}$ [*]

cette dernière simplification est très utile; partout où l'on est certain que x est différent de 1, on peut travailler avec l'expression $\dfrac{x-1}{x-4}$ qui est bien plus simple à manipuler !

1. problème si $(x-4)(x+1)=0$, c'est-à-dire si x =-1 ou x =4, donc $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;4\}$

2. $f(0)=-\dfrac{1}{4}=-0.25$

$f(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0$ (et $x\in D_f$) $\Leftrightarrow(x-1)(1+x)=0$ (et $x\in D_f$), donc $Z_f=\{1\}$

3. En considérant l'écriture [*], on voit immédiatement que f admet une asymptote

verticale en x=4 (type $\frac{1}{0}$), un « trou » en x=-1 (type $\frac{0}{0}$ ->simplifier->calculer) et une asymptote horizontale y = -1 à $\pm\infty$ (même degré au numérateur et au dénominateur)

Dans tous les cas, on calcule la limite de type $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-4} = \frac{-2}{-5} = 0{,}4$

Selon les indications données par le professeur, on confirme – ou pas – les autres asymptotes par les calculs de limites ad-hoc (càd limites à gauche et à droite pour $x \to 4$ et limites quant $x \to \pm\infty$

4. $f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2-3x-4}\right)' \overset{si\, x\neq 1}{=} \left(\frac{x-1}{x-4}\right)' = \frac{1\cdot(x-4)-(x-1)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{x-4-x+1}{(x-4)^2} = \frac{-3}{(x-4)^2}$

5. f'déjà factorisée

6.Zéros de f': $Z_{f'} = \emptyset$

7. Tableau de signes de la dérivée (attention de ne pas oublier x=-1 dans le tableau!) :

x		-1		4	
-3	-	-	-	-	-
$(x - 4)^2$	+	+	+	0	+
$f'(x)$	-	///	-	///	-
$f(x)$	↘	///	↘	///	↘

8.pas de points critiques

9.* $f''(x) \overset{si\, x\neq 1}{=} \left(\frac{-3}{(x-4)^2}\right)' = -3\cdot\left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)' = -3\cdot\frac{-((x-4)^2)'}{(x-4)^4} = -3\cdot\frac{-2(x-4)}{(x-4)^4}$

$= \frac{6(x-4)}{(x-4)^4} \overset{si\, x\neq 4}{=} \frac{6}{(x-4)^3}$

Zéros de f'': $Z_{f''} = \emptyset$

x		-1		4	
6	+	+	+	+	+
$(x - 4)^3$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	///	+	///	-
$f(x)$	concave	///	concave	///	convexe

10.

Voir les exercices 48 à 61

Taux de variation, nombre dérivé

1 Calculer le taux de variation de la fonction f donnée entre les deux points donnés et interpréter graphiquement :

a. $f(x)=x^2$ $A=(1;f(1))$ $P=(2;f(2))$

b. $f(x)=x^2$ $A=(1;f(1))$ $P=(1{,}5;f(1{,}5))$

c. $f(x)=x^2$ $A=(-2;f(-2))$ $P=(2;f(2))$

d. $f(x)=x^3$ $A=(1;f(1))$ $P=(2;f(2))$

2 A partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a. $f(x)=x^2$ avec $a=1$ puis $a=3$

b. $f(x)=x^3$ avec $a=2$

c. $f(x)=x$ avec $a=-2$ puis $a=5$

d. $f(x)=3$ avec $a=2$ puis $a=7$

3 Trouver la pente de la tangente à la parabole d'équation $y=x^2$ au point (-1;1).

4 Un mobile se déplace sur un axe selon la loi $p(t)=4t-\frac{t^2}{2}$, où $p(t)$ représente la position du mobile au temps t.

a. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants:

i $t_1=2$ et $t_2=3$ | iv $t_1=a$ et $t_2=t$

ii $t_1=2$ et $t_2=t$ | v $t_1=t$ et $t_2=t+h$

iii $t_1=2$ et $t_2=2+h$

b. Calculer la vitesse instantanée du mobile:

i à l'instant $t = 2$; ii à l'instant t.

5 Que penser de la dérivée de la fonction réelle définie par $f(x)=|x^2-1|$ en $x=0$, $x=1$, $x=2$?

6 Déterminer le nombre dérivé de la fonction réelle f définie par $f(t)=t^{10}-7t^2+3$ lorsque t = –1.

Voir la théorie 1 à 3

Fonction dérivée, équation de la tangente

7 Calculer, à partir de la définition de la fonction dérivée, la fonction dérivée des fonctions réelles ci-dessous; si possible, représenter f et f' dans un même repère et interpréter graphiquement le résultat :

a. $f(x)=7$

b. $f(x)=x$

c. $f(x)=3x$

d. $f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

e. $f(x)=x^2$

f. $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\in\mathbb{R}^*$ $b,c\in\mathbb{R}$

g. $f(x)=x^3$

h. $f(x)=\sqrt{x}$

i. $f(x)=\frac{1}{x}$

j. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

k. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

8 Trouver l'équation de la droite tangente à la parabole d'équation $y=x^2$ au point (-1;1).

9 Déterminer l'équation de la tangente à la fonction réelle $f:x\to\frac{1}{x^2}$ au point $(2;\frac{1}{4})$.

10 Soit f définie par $f(x)=x^3-x$.

a. Déterminer l'équation de la tangente $t(x)$ à f sachant que 2 est l'abscisse du point de tangence.

b. Déterminer l'équation de la tangente $t(x)$ à f sachant que la pente de la tangente vaut 2.

c. Déterminer les x pour lesquels les tangentes sont horizontales.

11 Vrai au faux ? Justifier soigneusement chaque réponse :

a. Si une droite est tangente à une courbe en un point, alors la droite ne rencontre la courbe qu'en ce point.

b. Si une droite rencontre une courbe en un seul point, alors elle est tangente à la courbe en ce point.

12 Montrer que la pente de la tangente à la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ au point $A(a;f(a))$ est égale à $-\frac{1}{a^2}$, puis calculer l'équation de la tangente au point $A(4; f(4))$ et la représenter graphiquement avec f.

13 Les courbes $f(x)=x^2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$ ont-elles une tangente commune ? Si oui, déterminer son équation. Si non, le prouver.

14 On considère la fonction f définie par $f(x)=x(3-x)(x-1)^2$ pour $x\in[0;3]$. La courbe représentative de cette fonction modélise la vue en coupe de deux sommets des Alpes, qu'on désire relier par un téléphérique.

a. Déterminer l'équation de la tangente en deux points distincts de cette courbe (les deux points de tangence représentent les stations du téléphérique et le segment de droite compris entre ces deux points représente le câble).

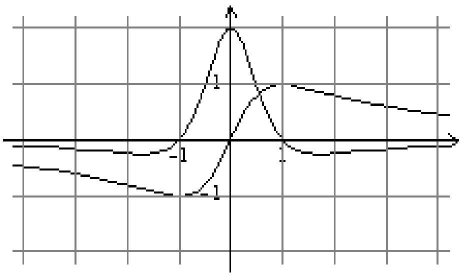
b. Calculer la longueur du câble.

Indication : utiliser un outil de calcul formel pour résoudre le système !

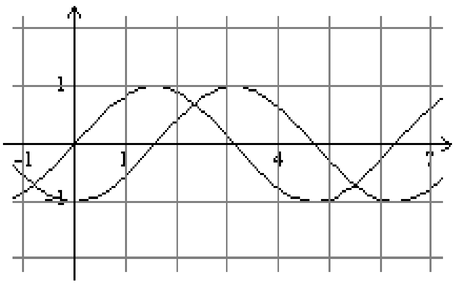
15 Montrer que si une fonction est constante sur un intervalle, alors sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle.

16 Sur chacun des graphiques suivants, on a représenté graphiquement deux fonctions. Dire si l'une peut être la dérivée de l'autre.

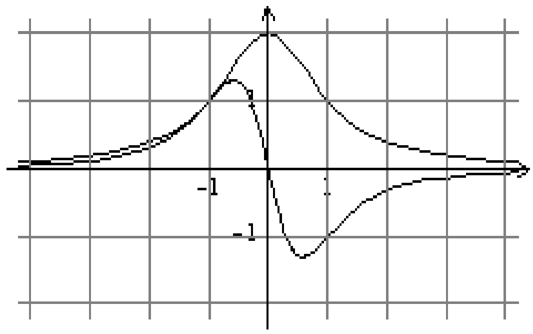
a.



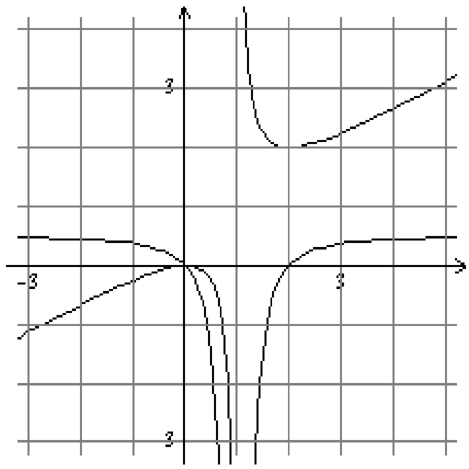
b.



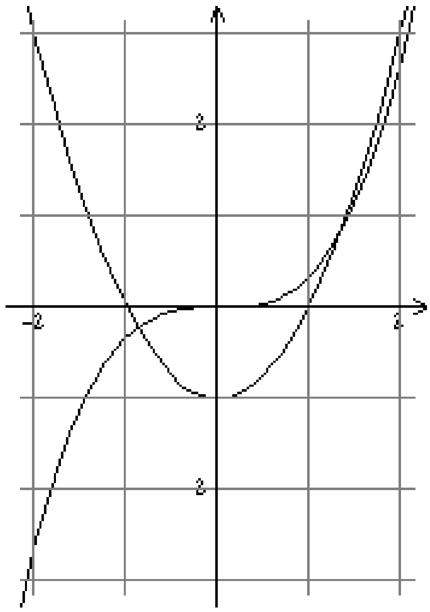
c.



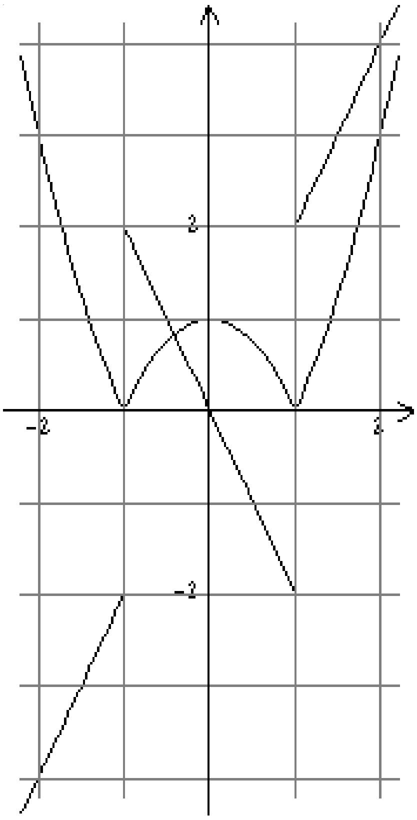
d.



e.

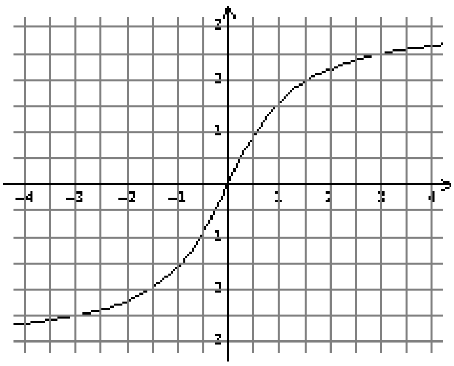


f.

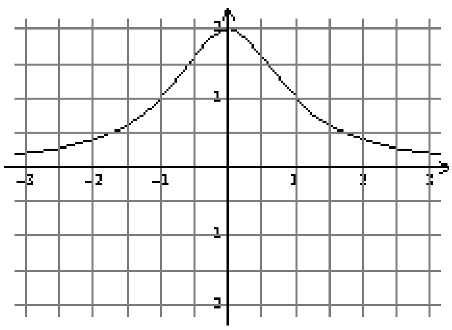


17 Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, représenter graphiquement la fonction dérivée dans le même repère :

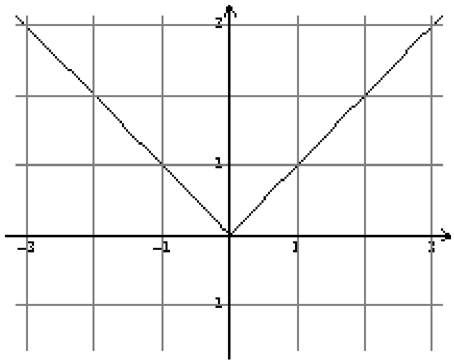
a.



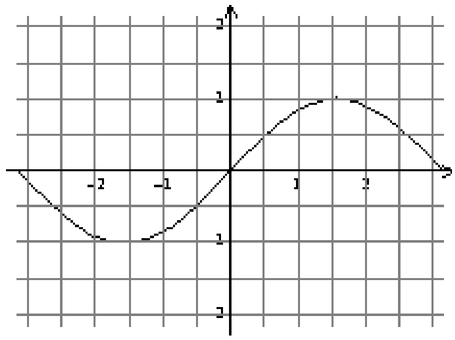
b.



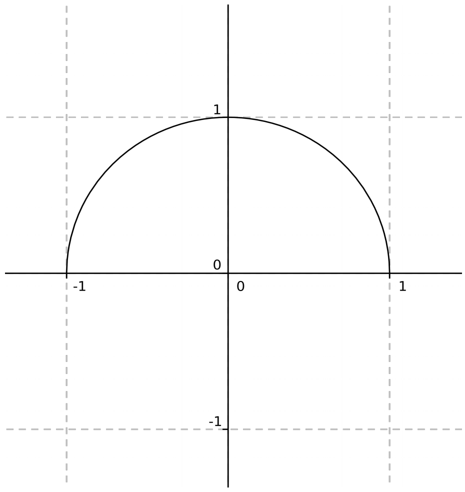
c.



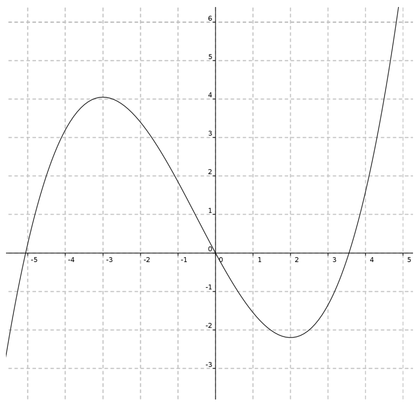
d.



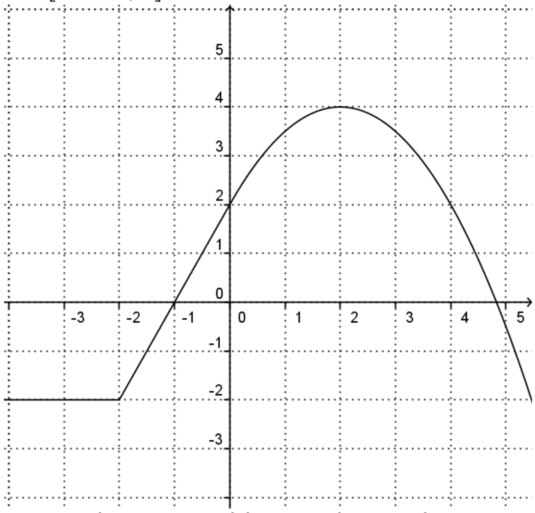
e.



f.



18 Sur le graphique ci-dessous on a représenté une fonction g pour $x \in [-4\,;5{,}5]$:



a. Recopier ce graphique puis esquisser aussi précisément que possible la représentation graphique de la fonction dérivée g'.

b. Sur le même repère, mais avec une autre couleur, tracer une courbe h qui passe par le point $P(0;-2)$ et telle que $h'(x) = g(x)$.

Voir la théorie 4 à 7

Formules de dérivation

19 Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes en justifiant toutes les étapes, et en donnant des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire :

a. $(x^2-3)'$

b. $\left(\frac{2}{x^5}\right)'$

c. $\left(\sqrt{2x^3-3}\right)'$

d. $\left(\sqrt[3]{x+1}\right)'$

20 Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a. $(x^5-10x)'$

b. $(x^{100}+100x)'$

c. $(x^2+3)'$

d. $(x^2+\pi x^3)'$

e. f' la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x^2+9$

f. f' la dérivée de la fonction f définie par $f: x \rightarrow \frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+\frac{x}{7}$

g. f' la dérivée de la fonction f définie par $f: t \rightarrow t^3+t^2+t+1$

h. $(3\sqrt{x})'$

i. $(\sqrt{3x})'$

j. $(\sqrt[3]{x})'$

k. $(\sqrt{x^3})'$

l. $(\sqrt{2x^3})'$

m. $(x\sqrt{x})'$

n. $(x^{895})'$

o. $(x^{-45})'$

p. $(x^{\frac{4}{3}})'$

q. $(x^{\sqrt{2}})'$

r. $\left(\frac{4}{x}\right)'$

s. $\left(\frac{-18}{x}\right)'$

t. $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$

u. $\left(\frac{1}{3x^3}\right)'$

v. $\left(\frac{24}{x^2}\right)'$

w. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

x. $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

y. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)'$

z. $\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'$

aa. $\left(\frac{1+2u^3}{2u}\right)'$

ab. $((2x+3)(3x-7))'$

ac. $(x^2(1+\sqrt{x}))'$

ad. $(x^3-x)(x^2-9)$

ae. $\left(\frac{x^2+1}{4x}\right)'$

Voir la théorie 8

Extrema

21 Représenter graphiquement une fonction de votre choix qui ait exactement 3 minima (locaux), 2 maxima (locaux), un minimum global et un maximum global.

22 Déterminer les zéros de la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^3-2x^2+1$

a. Peux-t-on en déduire les extrema de f?

b. Comment déterminer ces extrema ?

Voir la théorie 9

(Dé)croissance

23 Représenter graphiquement trois fonctions de votre choix qui soit croissantes sur $]-\infty;-2] \cup]1;3] \cup]5;8]$ et décroissantes sur $\mathbb{R} \setminus]-\infty;-2] \cup]1;3] \cup]5;8]$.

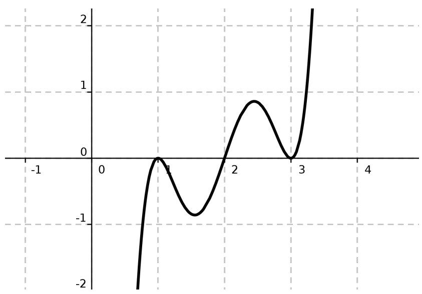
24 Est-il possible d'avoir une fonction qui est croissante et décroissante sur $[0;4]$?

25 Esquisser une représentation graphique d'une fonction f dont voici le tableau des signes de la dérivée :

x		-1		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

26 On donne ci-contre une représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f ;

f admet-elle un maximum et/ou un minimum ? Justifier



27 Déterminer les points critiques de la fonction f déterminée par
$f(x)=x^4-2x^3-12x^2+8x+6$

28 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Il n'existe pas de fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I.

b. Si f est nulle sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)>0$ sur I.

c. Si f est strictement croissante sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)>0$ sur I.

d. Si f est strictement décroissante et dérivable sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)<0$ sur I.

29 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction qui s'annule en $x=0$, qui est décroissante pour $x<2$ et croissante sinon.

30 Déterminer la valeur du nombre k pour que la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+k}$ admette un minimum égal à 8.

31 Déterminer les constantes a et b pour que la fonction définie par $f(x)=x^3+ax^2-6x+b$ admette au point (1;1) une tangente horizontale.

32 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ qui n'admet pas :

a. de maximum sur [0;1]

b. d'extremum sur [0:1]

33 Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier très clairement chaque réponse en vous appuyant sur les définitions, propriétés et théorèmes vus au cours ou sur un contre-exemple précis :

a. Si $f'(a)=0$ et $f''(a)=0$, alors f admet en a un point d'inflexion à tangente horizontale (un "palier").

b. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si f admet un maximum local en c et un minimum local en d, alors f admet un point d'inflexion dans $]c; d[$.

c. Il existe une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui admet un maximum en a et telle que $f''(a)=0$.

d. Si f est une fonction polynomiale de degré 3 et si $f''(a)=0$, alors f admet un point d'inflexion en a.

34 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction qui admet des points d'inflexion en $x=1$ et en $x=2$.

35 On considère la fonction définie par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

a. Déterminer les constantes a, b, c et d afin que le graphe de la fonction possède un extremum en (1; 16) et un autre en (5; −16).

b. f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, calculer ses coordonnées.

c. Esquisser la courbe représentative. de f.

36 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction qui admet un maximum en x = 1, un minimum en x = 3 et un point d'inflexion en x = 2 puis esquisser sa courbe représentative.

37 Le graphe d'une fonction du troisième degré possède un point d'inflexion en (1; 0) et une tangente d'équation $t(x)=11x-27$ au point d'abscisse 3. Déterminer cette fonction et esquisser sa courbe représentative.

Voir la théorie 10 à 11

Optimisation

38 La somme de deux nombres positifs est 16. Déterminer ces deux nombres de telle façon que :

a. la somme des cubes soit minimale; quelle est alors la valeur de ce minimum ?

b. la somme des cubes soit maximale; quelle est alors la valeur de ce maximum

39 La somme de deux nombres positifs est 20. Déterminer ces deux nombres de telle façon que :

a. le produit soit maximal

b. la somme des carrés soit minimale

c. le produit du carré de l'un par le cube de l'autre soit maximal.

40 Un fermier veut délimiter un champ rectangulaire avec une clôture longue de 4000m.
La pièce étant située le long d'une rivière, il suffit au fermier de poser la clôture sur trois des 4 côtés. Calculer les dimensions du champ d'aire maximale.

41 Comment faut-il partager 200m de clôture pour faire un enclos circulaire et un enclos carré de manière que l'aire totale soit:

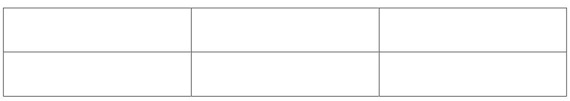
a. minimale ? Quelle est alors la valeur de ce minimum ?

b. maximale ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

42 Déterminer les dimensions de la boîte de conserve cylindrique d'une contenance de 1 litre construite avec le moins de matériau possible (on négligera l'épaisseur des parois et les déchets de construction).

43 On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 30 cm sur 20 cm. Déterminez la hauteur x de la boîte pour qu'elle ait la plus grande capacité possible.

44 On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo selon le plan ci-contre :



Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

45 Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'équation $y=1-x^2$ les plus proches de l'origine.

46 Quelles sont les dimensions du rectangle grisé d'aire maximale inscrit sous cette parabole de sommet (0;4) et de zéros -3 et 3 ?

47 Quel est le plus grand des nombres c et d ci-dessous ? Justifier !

$$c=0,987654321^3-3\cdot 0,987654321$$
$$d=0,987654320^3-3\cdot 0,987654320$$

Voir la théorie 12

Asymptotes, études de fonctions

48 Représenter graphiquement une fonction qui ait 3 asymptotes verticales et une asymptote horizontale à $\pm\infty$.

49 Représenter graphiquement une fonction qui ait 2 asymptotes verticales, une asymptote horizontale à $-\infty$ et une autre asymptote horizontale à $+\infty$.

50 Représenter graphiquement une fonction qui ait une asymptote horizontale à $-\infty$ et une asymptote oblique à $+\infty$.

51 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction f telle que $x=2$ et $x=4$ soient des asymptotes verticales, et que $y=-1$ soit une asymptote horizontale à $+\infty$.

52 Déterminer les asymptotes des fonctions f définies par :

a. $f(x)=\dfrac{3x^4-5x}{x^4+1}$ **c.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x^3-4x^2}$

b. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x^3+1}$ **d.** $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{4-x^2}$

53 Déterminer les asymptotes obliques des fonctions f définies par :

a. $f(x)=\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+2x+1}$ **c.** $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{x-2}$ **d.** $f(x)=\sqrt{x^2+2px+k}$, où *p* et *k* sont tels que *f* est définie sur $\mathbb{R}$

54 Déterminer les asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^n+3}{x^2-9}$ pour n = 0, 1, 2, 3 et esquisser dans chaque cas un graphe de f cohérent avec les calculs effectués.

55 Trouver, dans chacun des cas suivants, une fonction rationnelle avec une asymptote :

a. oblique d'équation $y=3x-5$

b. horizontale d'équation $y=-2$

c. verticale d'équation $x=7$.

d. horizontale d'équation $y=0$, deux verticales d'équations $x=3$ et $x=-10$.

e. Une asymptote verticale d'équation $x=5$ et une asymptote oblique d'équation $y=-2x+5$.

56 Déterminer les coefficients réels a, b, c et d de la fonction rationnelle f définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ dont le graphe passe par le point $A(2;\ -2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équation $x=-3$ et $y=-2x+1$

57 Tracer le graphe d'une fonction réelle f satisfaisant simultanément toutes les conditions suivantes :

a. $f(2)=-4$

b. l'ensemble des préimages de 1 est {-5;8}

c. l'ensemble Z_f des zéros de f est {-4;7}

d. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

e. f n'est pas définie en $x=-3$ et $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-2$

f. $f(1)=-5$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas

g. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$

h. f n'est pas dérivable en $x=4$

58 On s'intéresse à des fonctions telles que $f(3)$ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$.

a. Représenter graphiquement trois fonctions distinctes qui vérifient ces deux conditions.

b. Donner l'expression $f(x)$ d'une fonction f qui vérifie ces deux conditions.

59 Etudier les fonctions définies par (sans deuxième dérivée) :

a. $f(x)=3x^5-5x^3$

b. $f(x)=x^4-2x^3$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$

d. $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2-1}$

e. $f(x)=\dfrac{x-x^3}{x^3-6x^2+5x}$

60 Etudier les fonctions suivantes (sans deuxième dérivée) :

a. $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2}$

c. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

61 Etudier les fonctions ci-dessous, avec la deuxième dérivée :

a. $f(x)=3x^5-5x^3$

b. $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-12}{-x^2+3x-2}$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+4}$

d. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+x^3}{4-x^2}$

e. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$

62 Etudier les fonctions ci-dessous :

a. $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|+2}$ *(sans 2e dérivée)*

b. $f(x)=5x+3\sqrt{x^2-1}$ *(sans 2e dérivée)*

c. $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ *(sans 2e dérivée)*

d. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x}$ *(avec 2e dérivée)*

e. $f(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ *(sans 2e dérivée)*

f. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ *(sans 2e dérivée)*

g. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$ *(sans 2e dérivée)*

Voir la théorie 13 à 15

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

63 Trouver l'angle d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{3}x^2+1$.

64 Trouver x et y des nombres positifs dont la somme soit égale à 60 et tels que xy^3 soit :

a. maximal **b.** minimal.

65 Déterminer les dimensions d'un rectangle de plus grande aire ayant un périmètre de 30 cm.

66 Quelles dimensions faut-il donner à une boîte cylindrique fermée en aluminium de 3dl pour utiliser le minimum d'aluminium ? Que vaut alors ce minimum ?

67 Une ficelle de longueur L est coupée en deux morceaux ; avec l'un d'eux on forme un carré et avec l'autre un triangle équilatéral. À quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximale ?

68 Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle de rayon R = 4, trouver celui dont l'aire est maximale.

69 On inscrit un cylindre droit dans un cône droit de rayon r et de hauteur h.

a. Quelles sont ses dimensions pour que son volume soit minimal ?

b. Quelles sont ses dimensions pour que son aire latérale soit minimale ?

70 Déterminer les dimensions du cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon R.

71 Déterminer la distance minimale du point A = (4 ; 2) à la parabole $y^2=8x$.

72 Soit P = (3;2), A = (x;0) avec x>0 et B = (0;y) avec y>0. Déterminer l'équation d'une droite passant par P et telle que le triangle ΔOAB ait une aire :

a. minimale

b. maximale

73 Déterminer les asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x^2-6x+18}{x-2+x^2}$.

74 Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes et interpréter graphiquement :

a. $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$

b. $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$

c. $f(x)=2x-\sqrt{4x^2+2x+1}$

d. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}$

75 Etudier les fonctions suivantes :

a. $f(x)=\dfrac{x(3x+4)}{2(x-1)^2}$ *(avec 2e dérivée)*

b. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ *(avec 2e dérivée)*

c. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ *(avec 2e dérivée)*

d. $f(x)=\dfrac{x^5}{20}+\dfrac{x^4}{4}$ *(sans 2e dérivée)*

e. $f(x)=2-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}$ *(sans 2e dérivée)*

f. $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ *(avec 2e dérivée)*

76 Etudier les fonctions suivantes, y compris les asymptotes obliques :

a. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{2x(1-x)}$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+x^3}{4-x^2}$

77 Etudier la fonction suivante, y compris la deuxième dérivée :

a. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$

b. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$

c. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x}$

Bilan

« Il n'y a point d'art mécanique si petit et si méprisable qui ne puisse fournir quelques observations ou considérations remarquables. »

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716,
philosophe, mathématicien, physicien, *logicien, diplomate, juriste et philologue allemand*

A savoir en fin de chapitre

Introduction à la notion de dérivée

- ✔ taux de variation ;
- ✔ dérivée en un point (nombre dérivé): définition, calculs ;
- ✔ interprétation géométrique comme pente de tangente ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 6

Fonction dérivée

- ✔ fonction dérivée : définition ; calculs de dérivées de fonctions élémentaires avec la définition ;
- ✔ équation de la tangente ; théorème sur l'équation de la tangente ;
- ✔ lien graphique entre f et f' ;

Voir la théorie 4 à 7 et les exercices 7 à 18

Formules de dérivation

- ✔ formules de dérivation, utilisation efficace ;

Voir la théorie 8 et les exercices 19 à 20

Relation entre « extremum de f » et « zéro de f' »

- ✔ extrema (min/max) local et global, point critique : définitions et interprétation graphique ;
- ✔ relation entre « extremum de f et "zéro de f' » ;

Voir la théorie 9 et les exercices 21 à 22

Relation entre «(dé)croissance de f» et «signe de f' »

- ✔ croissance/décroissance sur un intervalle : définitions et interprétation graphique ;
- ✔ relation entre «(dé)croissance de f et signe de f' » ;
- ✔ tracer une représentation graphique d'une fonction vérifiant des conditions données ;
- ✔ [avancé] deuxième dérivée, convexité, concavité ; points d'inflexion ;
- ✔ [avancé] relation entre «convexité/concavité de f et "signe de f'' » ;

Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 23 à 37

Optimisation

- ✔ problèmes d'optimisation, méthode ;

Voir la théorie 12 et les exercices 38 à 47

Applications de la dérivée»

- ✔ asymptotes verticales et horizontales ;
- ✔ [avancé] asymptotes obliques ;
- ✔ étude de fonction ; méthode.

Voir la théorie 13 à 15 et les exercices 48 à 61

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...

http://sesamath.ch/manuel-matugym-3e/complements/ch02

Notes personnelles

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....